P1. a) Arătaţi că dacă $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ este o funcţie de două ori derivabilă care verifică egalitatea

$$f'' = f + f' ,$$

atunci f este indefinit derivabilă.
b) Determinaţi toate funcţiile indefinit derivabile $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ care verifică egalitatea de mai sus.
S. a) Vom arăta că dacă o funcţie care verifică egalitatea din enunţ este derivabilă de n ori, unde $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, atunci ea este derivabilă de $n+1$ ori. Va rezulta atunci că f este indefinit derivabilă.
Să presupunem deci că f este derivabilă de n ori şi verifică egalitatea din enunţ. Derivând de $n-2$ ori în egalitatea dată, rezultă că

$$f^{(n)} = f^{(n-2)} + f^{(n-1)} .$$

Cum funcţiile $f^{(n-2)}$ şi $f^{(n-1)}$ sunt derivabile, rezultă că $f^{(n)}$ este de asemenea derivabilă, astfel că f este derivabilă de $n+1$ ori.
b) Fie $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ şi $\varphi' = 1-\varphi = -\frac{1}{\varphi}$. Egalitatea din enunţ se poate rescrie atunci în forma:

$$(f'' - \varphi' f') = \varphi(f' - \varphi' f) ,$$

astfel că funcţia $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g = f' - \varphi' f$, verifică relaţia

$$g' - \varphi g = 0 .$$

Înmulţind ultima egalitate cu $e^{-\varphi x}$, obţinem că

$$\left(g(x) \cdot e^{-\varphi x}\right)' = 0.$$

Rezultă că funcţia $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = g(x) \cdot e^{-\varphi x}$ este constantă, astfel că există $k \in \mathbb{R}$ cu proprietatea că

$$f'(x) - \varphi' f(x) = k \cdot e^{\varphi x} \quad , (\forall) x \in \mathbb{R}.$$

Înmulţind această egalitate cu $e^{-\varphi' x}$, obţinem atunci că

$$\left(f(x) \cdot e^{-\varphi' x}\right)' = k \cdot e^{(\varphi - \varphi')x}.$$

Rezultă că există numere reale $K \left(= \frac{k}{\varphi - \varphi'}\right)$ şi L astfel încât

$$f(x) \cdot e^{-\varphi' x} = K \cdot e^{(\varphi-\varphi')x} + L \quad , (\forall) x \in \mathbb{R}.$$

Dar atunci rezultă că

$$f(x) = K \cdot e^{\varphi x} + L \cdot e^{\varphi' x} \quad , (\forall) x \in \mathbb{R}.$$