Clasa a X-a - Etapa 3 - Problema 1

Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ *şi numerele* $z_1, z_2, ..., z_n \in \mathbb{C}$ *astfel încât* $|z_1| = |z_2| = ... = |z_n| = 1$ *şi* $z_1 + z_2 + .. + z_n = 0$

a) *Demonstraţi că* $|z - z_1|^2 + |z - z_2|^2 + ... + |z - z_n|^2 = n|z|^2 + n$, *pentru orice* $z \in \mathbb{C}$;

b) *Demonstraţi că* $|z - z_1| + |z - z_2| + ... + |z - z_n| \leq n\sqrt{2}$, *pentru orice* $z \in \mathbb{C}$, *cu* $|z| \leq 1$..

Soluţie: a) Avem

$$\sum |z - z_k|^2 = \sum (z - z_k)(\overline{z} - \overline{z_k}) = \sum \left(|z|^2 + \overline{z} \cdot z_k + z \cdot \overline{z_k} + |z_k|^2 \right) == n|z|^2 + n.$$

b) Avem $\left(\sum |z - z_k| \right)^2 \leq n \cdot \sum |z - z_k|^2 \leq 2n^2$ şi de aici concluzia.