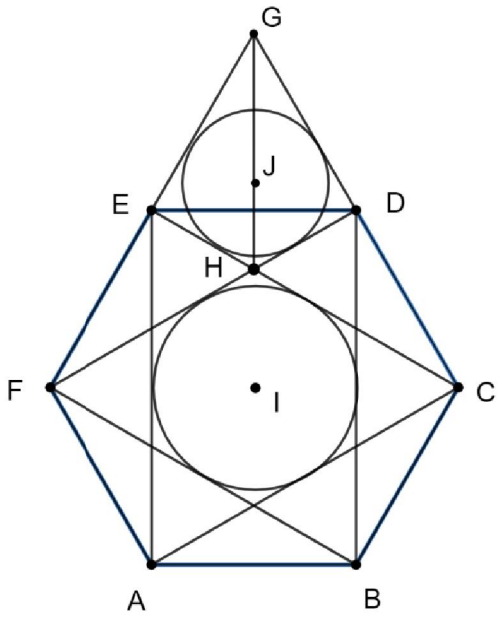
Problema 4

Fiecărui punct din plan îi este asociat un număr real astfel încât, pentru orice triunghi, numărul asociat centrului cercului înscris în acel triunghi este media aritmetică a celor trei numere asociate vârfurilor triunghiului. Demonstrați că fiecărui punct din plan i s-a asociat același număr.

Soluție. Pentru un punct P din plan, notăm cu $f(P)$ numărul asociat lui.

Fie A și B două puncte distincte în plan. Construim un hexagon regulat $ABCDEF$ cu centrul I. Fie G intersecția dreptelor CD și EF, iar H intersecția dreptelor CE și DF. Atunci $DGEH$ este un patrulater ortodiagonal, având ca axă de simetrie diagonala GH, deci este circumscris unui cerc de centru J (vezi figura). Acum avem:

$$f(A)+f(C)+f(E)=3f(I)=f(B)+f(D)+f(F)$$
$$f(G)+f(C)+f(E)=3f(J)=f(G)+f(D)+f(F)$$

Scăzând aceste relații membru cu membru obținem $f(A)=f(B)$. Cum A și B au fost alese arbitrar, problema este rezolvată.