Dacă x, y, z sunt numere reale pozitive astfel ca

$$\frac{x^2+xy}{y}=\frac{y^2+yz}{z}=\frac{z^2+zx}{x},$$

arătaţi că $x=y=z$.

Manuela Prajea

Soluţia 1. Putem presupune, fără a restrânge generalitatea, că $x \geq y$ şi $x \geq z$. Atunci $\frac{x^2+xy}{y} \geq 2x$, iar $\frac{z^2+zx}{x} \leq 2z$. Deducem că $2z \geq 2x$, de unde, cu presupunerea iniţială, $x=z$. Atunci avem $\frac{x^2+xy}{y}=\frac{z^2+zx}{x}=2x$, de unde $x=y$ şi concluzia.

Soluţia 2. În funcţie de relaţia de ordine dintre x, y, z distingem şase cazuri:
Cazul **I.**: dacă $x \leq y \leq z$ atunci $\frac{x}{y} \leq 1 \leq \frac{z}{x}$ şi $x+y \leq x+z$. Înmulţind termen cu termen aceste două inegalităţi (termenii sunt numere pozitive), obţinem $\frac{x^2+xy}{y} \leq \frac{z^2+zx}{x}$. Conform enunţului, avem egalitate în această inegalitate, deci şi în inegalităţile pe care le-am înmulţit. Rezultă aşadar $\frac{x}{y}=1=\frac{z}{x}$, adică $x=y=z$.
Analog se tratează cazurile **II.** $y \leq z \leq x$ şi **III.** $z \leq x \leq y$.
Cazul **IV.**: dacă $x \leq z \leq y$ atunci $\frac{x}{y} \leq 1 \leq \frac{y}{z}$ şi $x+y \leq y+z$. Înmulţind termen cu termen aceste două inegalităţi, obţinem $\frac{x^2+xy}{y} \leq \frac{y^2+yz}{z}$. Trebuie să avem egalitate în această inegalitate, deci şi în inegalităţile pe care le-am înmulţit. Rezultă aşadar $\frac{x}{y}=1=\frac{y}{z}$, adică $x=y=z$.
Analog se tratează cazurile **V.** $y \leq x \leq z$ şi **VI.** $z \leq y \leq x$.
Aşadar în toate cazurile rezultă $x=y=z$.