P3. Determinaţi toate funcţiile continue $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ cu proprietatea că

$$f(x + arctg(y)) = f(y + arctg(x)) \quad , (\forall)x, y \in \mathbb{Q}\,.$$

R: Pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$ există şiruri de numere raţionale $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şi $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cu

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} x_n = x\,, \quad \lim_{n\longrightarrow\infty} y_n = y\,.$$

Cum f este continuă, deducem atunci că

$$f(x + arctg(y)) = f(\lim_{n\longrightarrow\infty} x_n + \lim_{n\longrightarrow\infty} arctg(y_n)) = \lim_{n\longrightarrow\infty} f(x_n + arctg(y_n)) =$$

$$= \lim_{n\longrightarrow\infty} f(y_n+arctg(x_n)) = f(\lim_{n\longrightarrow\infty} y_n+\lim_{n\longrightarrow\infty} arctg(x_n)) = f(y+arctg(x)) \quad , (\forall)x, y \in \mathbb{R}\,.$$

Cum pentru orice $u, v \in \mathbb{R}$ există şi sunt unice $x, y \in \mathbb{R}$ cu proprietatea că

$$\begin{cases} x + arctg(y) & = & u \\ y + arctg(x) & = & v \end{cases} ,$$

rezultă că $f(u) = f(x + arctg(y)) = f(y + arctg(x)) = f(v)$, $(\forall)u, v \in \mathbb{R}$. Prin urmare, funcţia f este constantă.
Reciproc, orice funcţie constantă este continuă şi verifică egalitatea din enunţ.