Vom numi un număr natural n *fidel* dacă exisă numere naturale $a < b < c$ astfel încât $a \mid b$, $b \mid c$ şi $n = a + b + c$.
Determinaţi mulţimea numerelor naturale care nu sunt *fidele*.

Olimpiadă India, 2011 (enunţ modificat)

Soluţie. (*Dan Schwarz*)
Dacă n este impar, $n = 2k+1 = 1+2+2(k-1)$, deci $n = 2k+1$ este *fidel* pentru orice $k \geq 3$.
$2^4 = 16$ este *fidel* deoarece $16 = 1+3+12 = 1+5+10$.
Dacă un număr natural n este *fidel*, atunci este clar că orice multiplu al lui n este de asemenea *fidel*: $mn = m(a+b+c) = ma+mb+mc$.
Prin urmare singurele numere care ar putea să nu fie *fidele* sunt cele de forma
$n = 2^{\ell}(2k+1)$ cu $\ell \in \{0,1,2,3\}$ şi $k \in \{0,1,2\}$, adică
$n \in \{1,2,3,4,5,6,8,10,12,20,24,40\}$. Cum însă $10 = 1+3+6$ este *fidel*, la fel sunt şi 20 şi 40. Deoarece orice număr *fidel* $n \geq 1+2+4 = 7$, rezultă că $1,2,3,4,5,6$ nu sunt *fidele*. Rămân în dubiu 8, 12 şi 24 pentru care o simplă verificare arată că ele nu sunt *fidele*.