Etapa 1, Problema 1

Fie a, b, c numere raţionale. Demonstraţi că $a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4}=0$ dacă şi numai dacă $a=b=c=0$.

***

Soluţie.

Dacă $a=b=c=0$, evident că $a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4}=0$.

Reciproc, fie $a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4}=0$; notăm $\alpha=b\sqrt[3]{2}, \beta=c\sqrt[3]{4}$. Dacă $\alpha=\beta=0$, vom avea $a=b=c=0$. Presupunem, prin absurd, că unul dintre numerele α sau β este nenul; atunci $\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2=\left(\alpha+\frac{1}{2}\beta\right)^2+\frac{3}{4}\beta^2\neq 0$. Avem:

$$\alpha+\beta=-a\in\mathbb{Q};\ \alpha\beta=2bc\in\mathbb{Q};$$
$$\alpha^3=2b^3\in\mathbb{Q},\ \beta^3=4c^3\in\mathbb{Q}\Rightarrow\alpha^3-\beta^3\in\mathbb{Q};$$
$$\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta\in\mathbb{Q}^*,$$

prin urmare

$$\alpha-\beta=\frac{\alpha^3-\beta^3}{\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2}\in\mathbb{Q}.$$

Din $\alpha+\beta\in\mathbb{Q}$, $\alpha-\beta\in\mathbb{Q}$ rezultă că $\alpha,\beta\in\mathbb{Q}$ şi, de aici, $b=c=0$, deci $\alpha=\beta=0$, ceea ce intră în contradicţie cu presupunerea asumată.

Soluţie alternativă.

Dacă $a=b=c=0$, evident că $a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4}=0$.

Reciproc, fie $a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4}=0$. Dacă două dintre numerele a, b, c sunt nule, atunci şi cel de-al treilea este, evident, egal cu zero.

Nu este posibil ca exact unul dintre numerele a, b, c să fie nul: dacă, de exemplu, $a=0$, din $b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4}=0$ obţinem că $\sqrt[3]{2}=-\frac{b}{c}\in\mathbb{Q}$, contradicţie.

Vom arăta că nu este convenabilă nici situaţia în care toate cele trei numere sunt nenule; presupunem, prin absurd, contrariul. Înmulţind relaţia $a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4}=0$ cu b, apoi cu $-c\sqrt[3]{2}$, deducem că $ab+b^2\sqrt[3]{2}+bc\sqrt[3]{4}=0$, respectiv $-ac\sqrt[3]{2}-bc\sqrt[3]{4}-2c^2=0$. Adunăm membru cu membru aceste două egalităţi şi rezultă că

$$\left(ab-2c^2\right)+\left(b^2-ac\right)\sqrt[3]{2}=0,$$

de unde $ab-2c^2=b^2-ac=0$. Atunci $c\left(ab-2c^2\right)+b\left(b^2-ac\right)=0$, adică $b^3-2c^3=0$, prin urmare $\sqrt[3]{2}=\frac{b}{c}\in\mathbb{Q}$, absurd.