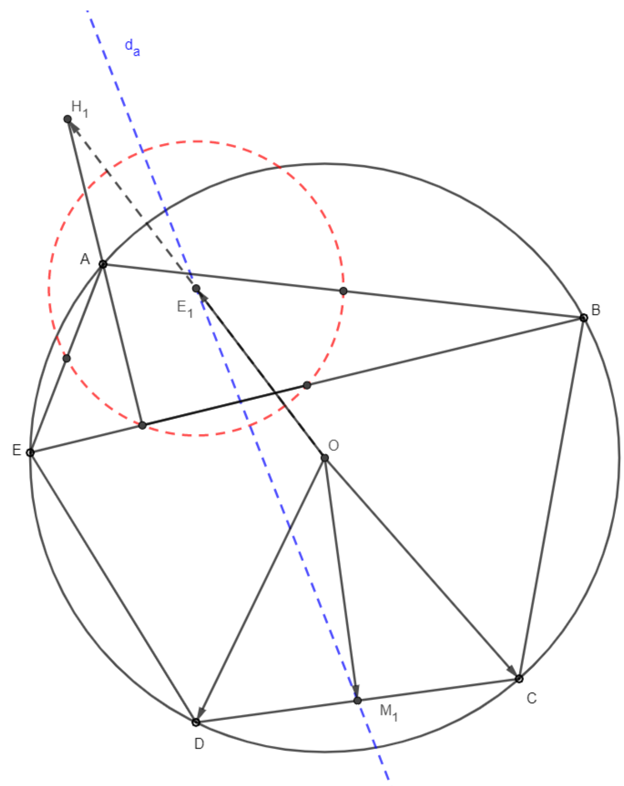
Problema 2. Fie ABCDE un pentagon inscriptibil. Demonstrați că dreptele determinate de mijlocul segmentului determinat de două din vârfurile pentagonului și centrul cercului lui Euler asociat triunghiului determinat de celelalte 3 sunt 10 drepte concurente. (Petru Braica, Satu Mare, clasa a 9-a)



Soluție.

Fie O centrul cercului în care este înscris pentagonul ABCDE iar cu M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, ..., M_{10} mijloacele segmentelor CD, DE, EA, AB, BC. ... și E_1, E_2, E_3, E_4, E_5 , ...E_{10} centrele cercurilor lui Euler asociate triunghiurilor ABE, ABC, BCD, CDE, DEA, ...

Avem egalitățile:

$$\overrightarrow{OM_1} = \frac{\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OC}}{2},$$

$$\overrightarrow{OE_1} = \frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OB}}{2}.$$

Deoarece punctul E_1 este mijlocul segmentului OH_1.(fapt cunoscut)

Considerăm punctul X mijlocul segmentului M_1E_1, de aici

$$\overrightarrow{OX} = \frac{\overrightarrow{OM_1}+\overrightarrow{OE_1}}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OC}}{2} + \frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OB}}{2}\right) = \frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OC}}{4},$$

prin urmare punctul X este fix pentru cele 5 drepte deoarece nu depinde de punctele M_1 și E_1.

În concluzie dreptele d_a, d_b, d_c, d_d, $d_{e, \ldots}$ sunt concurente.