

**Problema 3.** Fie  $S$  mulțimea numerelor de forma  $\overline{0,ab}$ , unde  $a$  și  $b$  sunt cifre nenule diferite. Care este cel mai mic număr de elemente din  $S$  pe care trebuie să le alegem pentru a fi siguri că găsim două a căror sumă să fie 1?

**Soluție:** În primul rând trebuie să aflăm câte numere respectă condițiile din enunț (au forma  $\overline{0,ab}$  cu cifre nenule, diferite). Cifra zecimilor poate fi înlocuită în 9 moduri, iar cifra sutimilor în 8 moduri. Așadar sunt  $9 \times 8 = 72$  de numere.

Le putem împărți în două grupe: cele mai mici sau egale cu 0,49 și cele mai mari sau egale cu 0,51.

Pentru a obține suma 1, trebuie să avem un număr din prima grupă și un număr din a doua grupă.

Să ne gândim acum la cele mai nefavorabile situații.

1. Pot alege numerele 0,91, 0,92, 0,93, 0,94, 0,95, 0,96, 0,97 sau 0,98. Pentru ele nu există numere cu două zecimale nenule cu care să le adunăm și să obținem 1.

2. Există numerele 0,12, 0,23, 0,34, 0,45, 0,56, 0,67, 0,78, 0,89 care dau 1 numai dacă le adun cu numere care au zecimale identice (0,88, 0,77, 0,66, 0,55, 0,44, 0,33, 0,22, respectiv 0,11).

Avem așadar posibilitatea să alegem 16 numere și să nu găsim două a căror sumă să dea 1.

Ne rămân încă 56 de numere ( $72 - 16 = 56$ ). Jumătate (28) dintre acestea sunt mai mici sau egale cu 0,49, cealaltă jumătate (28) sunt mai mari sau egale cu 0,51.

O situație nefericită ar fi să le aleg pe toate cele mai mici sau egale cu 0,49.

Cu acestea 28 și cu cele 16 de mai devreme tot nu găsim două a căror sumă să fie 1. Dar acum, cu încă un număr din cealaltă grupă sigur găsim două a căror sumă să fie 1.

În concluzie, trebuie să alegem

$$28 + 16 + 1 = 45 \text{ (de numere).}$$