

Problema 1. Fie x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 cinci numere naturale distincte , care verifică egalitatea

$$(2023 - x_1)(2023 - x_2)(x_3 - 2023)(x_4 - 2023)(x_5 - 2023) = 2023.$$

Arătați că $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$ se divide cu 723.

* * *

Soluție: Avem $2023 = 7 \cdot 17^2$ sau ca produs de cinci numere putem scrie $2023 = 1 \cdot 17 \cdot 1 \cdot 7 \cdot 17$.

Din $2023 - x_1 = 1$ obținem $x_1 = 2022$, din $2023 - x_2 = 17$ obținem $x_2 = 2006$, din $x_3 - 2023 = 1$ obținem $x_3 = 2024$, din $x_4 - 2023 = 7$ Obținem $x_4 = 2030$ și din $x_5 - 2023 = 17$ obținem $x_5 = 2040$.

Atunci $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 10122$ și cum $10122 : 723 = 14$, evident 10122 se divide cu 723.