Problema 2. Se consideră numerele raţionale a,b,c astfel încât $a\sqrt[3]{4}+b\sqrt[3]{2}+c=0$. Demonstraţi că $a=b=c=0$.

***

Soluţie:

Presupunem că $a\neq 0$ şi considerăm ecuaţia de gradul al II-lea: $(\mathrm{E})\ \ ax^2+bx+c=0$.

Cum $a\left(\sqrt[3]{2}\right)^2+b\sqrt[3]{2}+c=0$, rezultă că $\sqrt[3]{2}$ este o soluţie reală a ecuaţiei (E), prin urmare avem $\Delta=b^2-4ac\geq 0$ şi atunci ecuaţia (E) are rădăcinile reale $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$.

Dacă $\Delta=0$, avem $x_1=x_2=\dfrac{-b}{2a}$, deci $\sqrt[3]{2}=\dfrac{-b}{2a}\in\mathbb{Q}$, absurd!

Dacă $\Delta>0$, avem $\sqrt[3]{2}\in\{x_1,x_2\}$. Dacă, de exemplu, $\sqrt[3]{2}=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$, atunci $2a\sqrt[3]{2}=\sqrt{\Delta}-b$. Prin ridicare la cub obţinem $8a^3\cdot 2=\Delta\sqrt{\Delta}-3\Delta\cdot b+3\sqrt{\Delta}\cdot b^2-b^3$, iar de aici rezultă $\sqrt{\Delta}=\dfrac{16a^3+b^3+3\Delta\cdot b}{\Delta+3b^2}\in\mathbb{Q}$. Atunci $\sqrt[3]{2}=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\in\mathbb{Q}$, absurd!

Contradicţia obţinută ne arată că presupunerea făcută este falsă, deci $a=0$. Acum egalitatea din ipoteză devine $b\sqrt[3]{2}+c=0$. Dacă $b\neq 0$ obţinem $\sqrt[3]{2}=\dfrac{-c}{b}\in\mathbb{Q}$, absurd! Rezultă $b=c=0$.

În concluzie $a=b=c=0$.

Observaţie. Am folosit următoarele rezultate teoretice:

i) Pentru un număr natural n are loc echivalenţa: $\sqrt[3]{n}\in\mathbb{Q}\ \Leftrightarrow\ n$ este cub perfect;

ii) Rezultatul unor operaţii de înmulţire şi adunare cu numere raţionale este număr raţional.