MULȚIMEA $\mathbb{R}$ A NUMERELOR REALE

Rezumat. Această lecție din ciclul pentru liceu pune accentul pe o mai bună înțelegere a numerelor reale și a proprietăților lor.

Lecția se adresează claselor a X-a, a XI-a și a XII-a.

Autor: Dan Schwarz

Data: 4 octombrie 2010

1. Introducere și notații

Suntem deja cu toții familiari cu mulțimea numerelor întregi nenegative $\mathbb{N} = \{0, 1, \ldots, n, n+1, \ldots\}$, mulțimea tuturor numerelor întregi (cu semn) $\mathbb{Z} = \{\ldots, -n, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, n, \ldots\}$ și mulțimea numerelor raționale, mai ales în reprezentarea prin fracții $\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0\right\}$. Numerele reale iraționale, altele decât cele menționate mai sus, au fost fundamentate în mod riguros abia târziu, prin metode analitice (Cauchy sau Cantor) sau algebrice (Dedekind), când s-a completat corpul de cunoștințe asupra mulțimii numerelor reale $\mathbb{R}$.

2. Sisteme de numere

2.1. Numerele întregi. Numerele întregi pozitive „numără” obiecte, iar zero și numerele negative sunt esențiale pentru operații cu ele. Caracteristica lor esențială este că fiecare întreg n are unul și numai un succesor, $n+1$, ceea ce permite procedeul inducției matematice. Privite prin reprezentarea lor pe o dreaptă pe care s-a fixat o origine O, ele apar ca puncte izolate, discrete, la distanțe de pas egal cu 1.

2.2. Numerele raționale (fracții). Numerele raționale apar, la grecii antici, mai ales în legătură cu construcțiile geometrice, proporțiile, rapoartele etc., ca lungimi de segmente. Dat fiind un segment de lungime 1 (cu un capăt în origine), se poate construi ușor, doar cu rigla și compasul[1], un segment de lungime $\frac{1}{q}$, pentru orice numitor (întreg) pozitiv q, și apoi se poate dubla, tripla etc., până la un segment de lungime $\frac{p}{q}$, pentru orice numărător (întreg) pozitiv p.

Privite pe dreapta cu originea O, numerele raționale nu se mai disting însă ca puncte izolate, căci un rațional r nu mai are un succesor! Într-adevăr, oricare ar fi un rațional $r' > r$, între r și r' se află $\frac{r+r'}{2}$; mai general, orice valoare $\frac{pr+qr'}{p+q}$, cu p, q întregi pozitivi. S-ar părea, la prima vedere, că rationalele ocupă toate punctele dreptei, ceea ce ar însemna că orice două segmente au lungimi comensurabile, adică, dacă lungimile lor sunt ℓ_1 și ℓ_2, va exista un segment de o anume lungime ℓ, astfel încât ℓ_1 și ℓ_2 să fie multipli întregi ai lungimii ℓ.

Un elev al lui Pitagora a făcut însă descoperirea că diagonala unui pătrat unitate (de latură 1) este incomensurabilă cu latura, deși evident poate fi construită, deci segmentul există pe dreaptă, iar capătul lui (diferit de origine) ocupă un punct al dreptei. Demonstrația care urmează este din [1], disponibilă liber în format PDF la [2]. Este remarcabil că demonstrația nu folosește argumente de divizibilitate (proprietățile numerelor prime stabilite de Euclid), ci are o aromă combinatorică.

Teorema 1. *Diagonala d a unui pătrat unitate nu este un număr rațional.*

Demonstrație. Fie $d = \frac{p}{q}$ (p, q întregi pozitivi), cu q minimal. Conform teoremei lui Pitagora,

[1] Din păcate, școala noastră a cam renunțat la instruirea elevilor în arcanele acestui subiect fascinant și extrem de educativ.

avem $d^2 = 1^2 + 1^2 = 2$, deci $1 < d < 2$, dar atunci $q < p < 2q$, astfel încât

$$\frac{p^2}{q^2} = 2, \quad \frac{2pq}{pq} = 2 \quad \text{și} \quad \frac{2pq - p^2}{pq - q^2} = 2 = \frac{p(2q-p)}{q(p-q)}.$$

Astfel $d = \frac{2q-p}{p-q}$. Dar $p < 2q$ și $0 < p - q < q$; deci avem o reprezentare rațională a lui d cu numitorul mai mic decât cel minimal! Putem inventa un simbol pentru a numi acest număr, anume $d = \sqrt{2}$. □

Tot la grecii antici, una dintre cele trei faimoase probleme nerezolvate ale antichității a fost dublarea cubului. Care este lungimea laturii ℓ a unui cub de volum 2, dublul volumului cubului unitate? Ecuația este $\ell^3 = 2$ și putem inventa simbolul $\ell = \sqrt[3]{2}$, dar abia în epoca modernă (Wantzel, 1837) s-a demonstrat că un segment având această lungime nu poate fi construit numai cu rigla și compasul.

Toate acestea arată că, printre punctele reprezentând numere raționale, se află și alte puncte, reprezentând numere iraționale, care toate împreună formează continuumul dreptei (reale).

3. Numerele reale

3.1. Axioma marginii superioare. Extinzând reprezentarea zecimală a numerelor raționale, veți învăța (sau ați învățat deja) o metodă de a reprezenta numerele reale iraționale ca având o parte zecimală infinită neperiodică. Din păcate, această metodă nu este cea mai potrivită pentru a pune în lumină proprietatea fundamentală a numerelor reale, cea de care depinde întregul eșafodaj al analizei matematice, și chiar definirea corectă a funcțiilor putere, exponențială și logaritm.

Axioma 1. *Orice mulțime nevidă A de numere reale, mărginită superior, are o margine superioară.*

Pentru a înțelege acest enunț avem nevoie de câteva definiții simple.

Definiția 1. *O mulțime nevidă A de numere reale se numește* mărginită superior *dacă există un număr real M, numit* majorant *al lui A, astfel încât $a \leq M$ pentru orice $a \in A$.*

Definiția 2. *Un majorant M se numește* margine superioară *a mulțimii A dacă, fiind dat oricare alt majorant M' al lui A, avem $M \leq M'$.*

Odată stabilită existența unei margini superioare M pentru o mulțime A, unicitatea rezultă imediat, căci, dacă ar exista o alta, fie ea M', conform definiției de mai sus am avea simultan $M \leq M'$ și $M' \leq M$, deci $M = M'$. Acest fapt ne permite să introducem simbolul $\sup A$ (supremum) pentru această unică margine superioară a lui A.

Evident, definițiile pot fi întoarse pentru a defini conceptele de mărginire inferioară, minorant și margine inferioară $\inf A$ (infimum), iar toate rezultatele se transpun imediat, considerând mulțimea $-A = \{-a \mid a \in A\}$.

Pentru a înțelege impactul acestor concepte, să considerăm mulțimea de numere raționale $R = \{r \in \mathbb{Q} \mid r^2 \leq 2\}$. Evident, R este nevidă ($0 \in R$) și mărginită superior ($r < 2$ pentru orice $r \in R$), deci are o margine superioară $\sup R$. Dar $\sup R$ nu este un număr rațional. Nu este suficient să argumentăm că $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. După parcurgerea completă a lecției, reveniți și argumentați în mod definitiv adevărul acestei afirmații.

Aplicația care pune în evidență în modul cel mai pregnant forța acestei axiome este surprinzătoarea teoremă a lui Knaster.

Teorema 2. *Fie $a \leq b$ numere reale. Orice funcție crescătoare $f\colon [a,b] \to [a,b]$ are un punct fix, adică există un punct $p \in [a,b]$ astfel încât $f(p) = p$.*

Demonstrație. Fie $A = \{x \in [a,b] \mid x \leq f(x)\} \subseteq [a,b]$. Desigur, $a \in A$, deci A este nevidă și mărginită superior (b este un majorant al lui A). Să luăm $p = \sup A$, deci $p \in [a,b]$. Pentru orice $x \in A$ avem $x \leq p$, deci $x \leq f(x) \leq f(p)$, deoarece f este crescătoare. Atunci $p = \sup A \leq f(p)$, căci $f(p)$ este un majorant al lui A, deci $p \in A$. Dar atunci $f(p) \leq f(f(p))$, deci $f(p) \in A$ și deci $f(p) \leq \sup A = p$. Împreună, cele două inegalități ne dau $f(p) = p$. □

3.2. Axioma lui Cantor.

Axioma 2. *Fiind dat un șir $(I_n)_{n\geq 1}$ de intervale închise și mărginite, imbricate, adică $I_{n+1} \subseteq I_n$ pentru orice $n \geq 1$, intersecția lor este nevidă: $\bigcap_{n\geq 1} I_n \neq \varnothing$.*

Vom arăta că, admițând Axioma marginii superioare, Axioma lui Cantor devine o teoremă.

Demonstrație. Fie intervalele date $I_n = [a_n, b_n]$. Condiția de imbricare ne dă $a_n \leq a_{n+1} \leq \cdots \leq b_{n+1} \leq b_n$ pentru orice $n \geq 1$. Fie $A = \{a_n \mid n \geq 1\}$ și $B = \{b_n \mid n \geq 1\}$. Mulțimea A este nevidă și mărginită superior (orice b_n este un majorant), iar mulțimea B este nevidă și mărginită inferior (orice a_n este un minorant). Atunci există $a = \sup A$ și $b = \inf B$, iar $a \leq b$ rezultă direct din definiții: $a \leq b_n$ pentru orice $n \geq 1$, a fiind $\sup A$, iar b_n un majorant pentru A; atunci a este un minorant pentru B, deci $a \leq \inf B = b$. Dar atunci $I = [a,b] \subseteq I_n$ pentru orice $n \geq 1$, deci chiar $\varnothing \neq I = \bigcap_{n\geq 1} I_n$ (detaliile pentru egalitate rezultă tot direct din definiții). □

Ca o consecință, dacă lungimile intervalelor devin oricât de mici, adică pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n \geq 1$ cu $b_n - a_n < \varepsilon$, atunci $a = b$ și intersecția intervalelor este un singur punct, căci $0 \leq b - a < \varepsilon$ pentru orice $\varepsilon > 0$. Ce se întâmplă dacă considerăm intervale deschise $I_n = (a_n, b_n)$? La prima vedere s-ar părea că totul merge la fel; de exemplu, pentru intervalele $I_n = \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ intersecția lor este egală cu $\{0\}$. Contraexemplul $I_n = \left(0, \frac{1}{n}\right)$ ne arată însă că, în acest caz, intersecția este vidă! Acest fenomen se datorează faptului că aici $0 = \sup A \in A$ și nu mai putem trage concluzia decât pentru intervalul (a,b), care este vid.

La fel, utilizând una sau alta dintre axiomele de mai sus, se poate demonstra că orice șir Cauchy (sau fundamental) este convergent, dar despre aceasta în altă lecție.

3.3. Axioma lui Arhimede.

Cine se îndoiește de adevărul următoarei afirmații?

Axioma 3. *Pentru orice număr real x există un întreg n astfel încât $x < n$.*

Și atunci de ce îi spunem axiomă? De fapt, acest enunț poate fi demonstrat folosind Axioma marginii superioare de mai sus. Există însă tot atâtea axiome pentru numerele reale câte metode de a le construi (Axioma Cantor, Axioma Cantor–Dedekind, Axioma Cauchy, …), iar scopul nostru nu este de a clarifica în profunzime axiomatica și fundamentele construcției numerelor reale (am atins doar marginal aceste idei în secțiunea precedentă). Importanța acestui enunț se reflectă în utilizarea lui (uneori inconștientă) în raționamentele noastre matematice. De exemplu:

Problema 1. *Fiind date două numere reale $0 < a < b$, arătați că există un număr rațional r, cu $a < r < b$, situat strict între ele.*

Soluție. Conform celor de mai sus, există $n > x = \max\left(\frac{2}{b-a}, \frac{1}{a}\right)$, deci $\frac{1}{n} < \min\left(\frac{b-a}{2}, a\right)$, și există N astfel încât $a < N = \frac{Nn}{n}$. Atunci există un cel mai mare întreg pozitiv m $(1 \leq m < Nn)$

astfel încât $\frac{m}{n} \leq a$, deci $\frac{m+1}{n} > a$ și

$$\frac{m+1}{n} \leq a + \frac{1}{n} < a + \frac{b-a}{2} = \frac{a+b}{2} < b,$$

și am găsit $r = \frac{m+1}{n}$. □

Desigur, cu un minim efort putem extinde acest rezultat pentru orice două numere reale $a < b$. Lăsăm ca exercițiu enunțul simetric, care cere să se arate că, fiind date două numere reale $a < b$, există un număr irațional x, cu $a < x < b$, situat strict între ele.

Definiția 3. *O mulțime A se numește* densă *în mulțimea B dacă pentru orice elemente $b_1 < b_2$ din B există un element a din A situat strict între ele: $b_1 < a < b_2$.*

Ceea ce am demonstrat mai sus se poate enunța acum astfel:

Teorema 3. *Mulțimea $\mathbb{Q}$ a numerelor raționale este densă în mulțimea numerelor reale $\mathbb{R}$.*

3.4. Concepte avansate. Putem deci asocia oricărui număr real $x \in \mathbb{R}$ mulțimea de numere raționale $R_x = \{r \in \mathbb{Q} \mid r \leq x\}$. Este clar atunci că $x = \sup R_x$. Fie acum o mulțime A de numere reale, mărginită superior: $a \leq M$ pentru orice $a \in A$. Fie

$$R = \bigcup_{a \in A} R_a.$$

Pentru orice $r \in R$ va exista deci $a \in A$ astfel încât $r \in R_a$ (din definiția reuniunii). Dar atunci $r \leq a \leq M$, deci mulțimea R este mărginită superior. Cine credeți că este $\sup R$? Nu este greu de văzut că $\sup R = \sup A$. Exact această observație i-a permis lui Dedekind să inverseze procesul și să definească numerele reale ca mulțimi de numere raționale mărginite superior. În felul acesta, Axioma marginii superioare devine și ea o teoremă, demonstrabilă ca mai sus.[2]

4. Încheiere

Vom reveni în lecții ulterioare cu aplicarea metodelor prezentate aici la definirea funcțiilor reale și la analiza șirurilor (probleme de convergență, continuitate etc.).

Bibliografie

[1] L. Moser, *An Introduction to the Theory of Numbers*, The Trillia Group, 2004.
[2] The Trillia Group, `http://www.trillia.com/moser-number.html`

[2] Aceasta este esența metodei tăieturilor lui Dedekind. Desigur, amănuntele tehnice sunt mult mai numeroase, iar precauțiile necesare pentru o definire corectă, exhaustivă și necontradictorie trebuie lăsate pentru studii mai avansate.