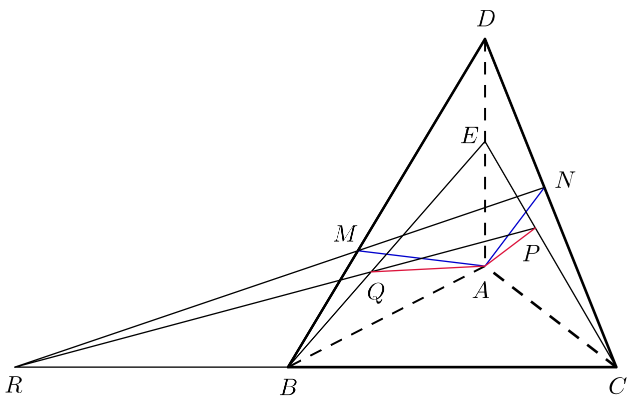
Se consideră un tetraedru $[ABCD]$ în care muchia $[AD]$ este perpendiculară pe faţa (ABC) şi E un punct al muchiei (AD). Notăm cu M, N, P, Q proiecţiile punctului A respectiv pe dreptele BD, CD, CE şi BE. Arătaţi că punctele M, N, P, Q sunt coplanare şi apoi demonstraţi că patrulaterul $MNPQ$ este inscriptibil.

Mihai Miculiţa – Culegere de probleme *Principii şi structuri fundamentale în matematica de liceu*, vol. II, Editura Albatros, 1986

Soluţie.

• Fiind perpendiculară pe planul (ABC), muchia AD este perpendiculară şi pe AB şi pe AC, deci triunghiurile DAB şi DAC sunt dreptunghice în A. Aplicând teorema catetei în aceste triunghiuri, obţinem $DA^2 = DM \cdot DB = DN \cdot DC$, relaţie care ne arată că patrulaterul $BMNC$ este inscriptibil.



• Distingem în continuare două cazuri: **1.** $AB = AC$ şi **2.** $AB \neq AC$.
În cazul **1.** rezultă că $DB = DC$ (din congruenţa triunghiurilor DAB şi DAC), apoi $DN = DM$, de unde $MN \parallel BC$. Analog rezultă succesiv $EB = EC$, $EP = EQ$ şi $PQ \parallel BC$. Aşadar în acest caz dreptele MN şi PQ sunt paralele, deci coplanare. Apoi se arată uşor că $\Delta MAB \equiv \Delta NAC$ (I.C.) şi $\Delta QAB \equiv \Delta PAC$ (I.C.). De aici rezultă $AM = AN$, $AP = AQ$ şi $\angle MAQ \equiv \angle NAP$ (ca diferenţă de unghiuri congruente). Obţinem că $\Delta MAQ \equiv \Delta NAP$ (L.U.L.), deci $MQ = NP$, deci $MNPQ$ este trapez isoscel sau paralelogram. Însă deoarece $\dfrac{MN}{BC} = \dfrac{DM}{DB} = \dfrac{DA^2}{DB^2} = \sin^2(\angle ABD)$, iar $\dfrac{PQ}{BC} = \dfrac{EQ}{EB} = \dfrac{EA^2}{EB^2} = \sin^2(\angle ABE)$, se vede uşor că $PQ \neq MN$, deci că $MNPQ$ este trapez isoscel, adică un patrulater inscriptibil.

• În cazul **2.**, din relaţiile $\dfrac{DM}{DB} = \dfrac{DA^2}{DB^2} \neq \dfrac{DA^2}{DC^2} = \dfrac{DN}{DC}$, rezultă că dreapta MN nu este paralelă cu BC. Fie atunci $\{R\} = MN \cap BC$. Din teorema lui Menelaus aplicată triunghiului BCD şi transversalei $R-M-N$ obţinem $\dfrac{CN}{ND} \cdot \dfrac{DM}{MB} \cdot \dfrac{BR}{RC} = 1$.

Folosind relaţiile $\frac{DM}{MB} = \frac{AD^2}{AB^2}$ şi $\frac{DN}{NC} = \frac{AD^2}{AC^2}$ (obţinute exprimând ,,catetele" AB, AC şi AD cu teorema catetei în triunghiurile ABD şi ACD), obţinem că $\frac{BR}{RC} = \frac{AB^2}{AC^2}$. Această relaţie arată că poziţia punctului R pe dreapta BC nu depinde de poziţia punctului D pe perpendiculara în A pe planul (BCD). Aşadar şi dreapta PQ va trece tot prin punctul R. Deducem că dreptele PQ şi MN sunt concurente în R, deci coplanare.

• Deoarece, aşa cum am văzut la început, patrulaterul $BMNC$ este inscriptibil, din puterea punctului R faţă de cercul circumscris patrulaterului $BMNC$ obţinem $RB \cdot RC = RM \cdot RN$. Analog se arată că şi $BQPC$ este inscriptibil, deci $RB \cdot RC = RQ \cdot RP$. De aici rezultă că $RM \cdot RN = RQ \cdot RP$, deci $MNPQ$ este patrulater inscriptibil.

• Nu cădeţi în capcana de a spune că MN şi PQ, fiind antiparalele cu BC în triunghiurile DBC respectiv EBC, sunt paralele între ele!