Clasa a X-a - Etapa 3 - Problema 1

Enunţ: *Fie* $a,b,c\in\mathbb{C}$ *astfel încât* $|a+b|=|c|$, $|a+c|=|b|$ *şi* $|b+c|=|a|$. *Atunci* $a+b+c=0$.

Soluţie: Fie punctele $A(a),B(b),C(c)$, $M(b+c)$, $N(a+c)$, $P(a+b)$ şi O originea sistemului. Ipoteza devine $OA=OM, OB=ON$ şi $OC=OP$. Fie S,T,U mijloacele segmentelor AM,BN,CP. Atunci deducem că $S=T=U$ deoarece au acelaşi afix, $\frac{a+b+c}{2}$. Presupunem $S\neq O$. Dar în $\triangle OAM$ isoscel deducem $OS\perp AM$. Analog $OS\perp BN, OS\perp CP$ ceea ce înseamnă că am construit mai multe perpendiculare în O pe OS ceea ce nu e posibil. Rămâne atunci $S=O$ adică $a+b+c=0$.