Problema 2. Demonstraţi că, pentru orice numere reale x şi y, are loc inegalitatea

$$x\sqrt{y^2+1}+y\sqrt{x^2+1}<x^2+y^2+1.$$

Olimpiadă Estonia, 1996-7

Soluţie:
Din inegalitatea mediilor aplicată numerelor x^2 şi y^2+1 avem că $x\sqrt{x^2+1} \leq |x|\sqrt{y^2+1}=\sqrt{x^2(y^2+1)} \leq \dfrac{x^2+y^2+1}{2}$, cu egalitate dacă $x^2=y^2+1$ şi $x \geq 0$.
Analog avem că $y\sqrt{x^2+1} \leq \dfrac{x^2+y^2+1}{2}$, cu egalitate dacă şi numai dacă $y^2 = x^2+1$ şi $y \geq 0$.
Prin adunarea celor două inegalităţi obţinem că

$$x\sqrt{y^2+1}+y\sqrt{x^2+1} \leq x^2+y^2+1.$$

Mai mult, deoarece egalităţile $x^2=y^2+1$ şi $y^2=x^2+1$ nu pot fi satisfăcute simultan, nu putem avea egalitate în ambele egalităţi adunate, deci nu putem avea egalitate nici în inegalitatea obţinută prin însumarea acestora.