Problema 1. Numerele raţionale $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sunt astfel încât $|x_k| \leq 1$ pentru orice $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ şi

$$|x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n| = 19 + |x_1 + x_2 + \ldots + x_n|.$$

Care este cea mai mică valoare posibilă a lui n?

Soluţie:
Deoarece $19 \leq 19+|x_1+x_2+\ldots+x_n| = |x_1|+|x_2|+\ldots+|x_n| \leq \underbrace{1+1+\ldots+1}_{n \text{ de } 1} = n$, este clar că trebuie ca $n \geq 19$.
Dacă ar exista $n = 19$ numere cu proprietatea din enunţ, ar trebui să avem egalitate în toate inegalităţile de mai sus, adică ar trebui ca $x_1 + x_2 + \ldots + x_{19} = 0$ şi $|x_1| = |x_2| = \ldots = |x_{19}| = 1$. Ar trebui aşadar ca $x_1, x_2, \ldots, x_{19} \in \{-1, 1\}$. Dar atunci suma $x_1 + x_2 + \ldots + x_{19}$ va fi un număr întreg impar, prin urmare ea nu poate fi 0. În concluzie, nu există $x_1, x_2, \ldots, x_{19}$ cu proprietatea din enunţ.
Aşadar, trebuie ca $n \geq 20$. Putem, de exemplu, alege $x_1 = x_2 = \ldots = x_{10} = \dfrac{19}{20}$ şi $x_{11} = x_{12} = \ldots = x_{20} = -\dfrac{19}{20}$. Aceste 20 de numere au proprietatea din enunţ, deci cel mai mic număr n este $n = 20$.