Determinaţi numerele naturale nenule n pentru care egalitatea

$$\{x\}+\left\{x+\frac{1}{n}\right\}=\{nx\}+\frac{1}{n}$$

este adevărată pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Lucian Dragomir

Soluţie.
Pentru că egalitatea trebuie să aibă loc pentru orice $x \in \mathbb{R}$, ea trebuie să aibă loc, printre altele, pentru $x=\frac{1}{n}$. Rezultă că

$$\left\{\frac{1}{n}\right\}+\left\{\frac{2}{n}\right\}=0+\frac{1}{n}.$$

Dacă $n \geq 3$ această relaţie revine la $0=\frac{1}{n}$, fals. Aşadar pentru $n \geq 3$ egalitatea din enunţ nu are loc pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Rămân de tratat cazurile $n=1$ şi $n=2$.

• Pentru $n=1$ egalitatea din enunţ devine $\{x\}+\{x+1\}=\{x\}+1$, adică $\{x+1\}=1$ care nu este adevărată pentru orice $x \in \mathbb{R}$ (este chiar falsă pentru orice $x \in \mathbb{R}$).

• Pentru $n=2$ egalitatea din enunţ revine la $\{x\}+\left\{x+\frac{1}{2}\right\}=\{2x\}+\frac{1}{2}$, adică la $x-[x]+x+\frac{1}{2}-\left[x+\frac{1}{2}\right]=2x-[2x]+\frac{1}{2}$, deci la $[2x]=[x]+\left[x+\frac{1}{2}\right]$, care este identitatea lui Hermite[1,2] şi este adevărată pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

În concluzie, singurul număr natural nenul pentru care egalitatea din enunţ are loc pentru orice $x \in \mathbb{R}$ este $n=2$.

[1] vezi materialul teoretic de la etapa a doua
[2] Charles Hermite (1822-1901), matematician francez, ro.wikipedia.org/wiki/Charles_Hermite