Două cercuri sunt secante în punctele A şi B. O dreaptă variabilă care trece prin B întâlneşte a doua oară cercurile în M şi N. Determinaţi locul geometric al centrului de greutate al triunghiului AMN.

Nicolae Pavelescu

Soluţie. Vom arăta mai întâi că mijlocul segmentului $[MN]$ descrie un cerc (în care unele puncte se obţin în situaţii degenerate), apoi că şi centrul de greutate al triunghiului AMN descrie tot un cerc (imaginea prin omotetia de centru A şi raport $2/3$ a primului cerc).
Să considerăm cercurile secante $\mathscr{C}_1$ şi $\mathscr{C}_2$, $\mathscr{C}_1 \cap \mathscr{C}_2 = \{A, B\}$ şi d o dreaptă variabilă ce trece prin B. Pentru a fixa ideile să admitem că d întâlneşte a doua oară pe $\mathscr{C}_1$ în M, iar pe $\mathscr{C}_2$ în N. (Dacă d este tangentă la $\mathscr{C}_1$ vom considera $M = B$, iar dacă d este tangentă la $\mathscr{C}_2$ vom considera $N = B$. Acest lucru ar fi trebuit precizat în enunţ. Dacă nu considerăm astfel, dintre poziţiile posibile ale dreptei d ar trebui să eliminăm cele două poziţii în care d este tangentă la unul dintre cercuri.) Notăm cu P mijlocul segmentului $[MN]$. (Dacă dreapta d coincide cu AB atunci obţinem $M = N = A$, iar triunghiul AMN este degenerat - redus la un punct. Putem considera că în acest caz $P = A$ şi centrul de greutate al ,,triunghiului" AMN este A. Alternativa este ca dintre poziţiile posibile ale dreptei d să o eliminăm pe cea în care $d = AB$. Din nou, acest lucru ar fi trebuit precizat în enunţ.)

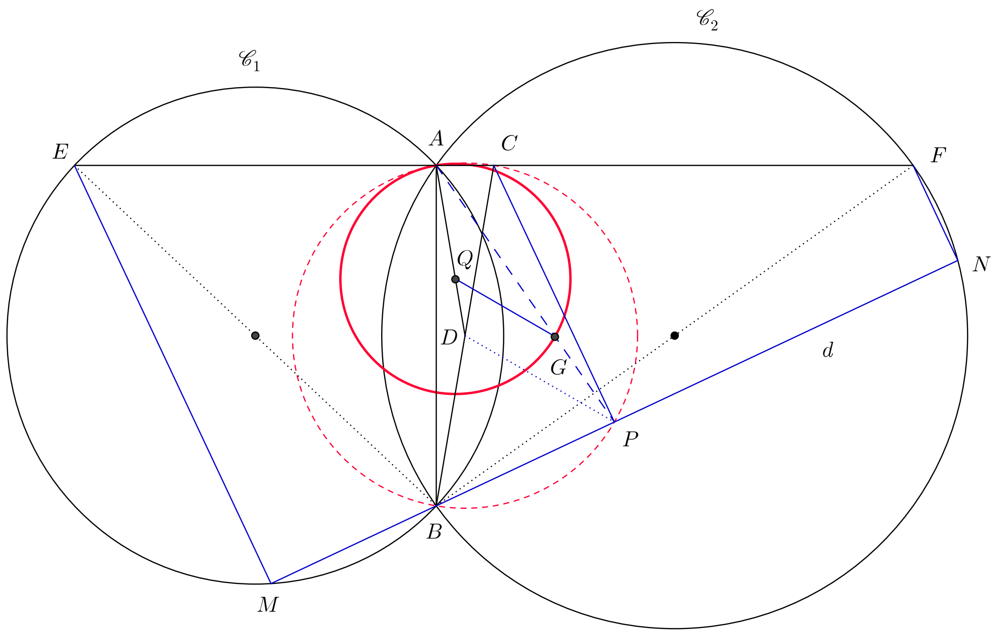
Fie E, F punctele diametral opuse lui B în cercurile $\mathscr{C}_1$, respectiv $\mathscr{C}_2$. Atunci $m(\angle EAB) = m(\angle FAB) = 90°$, deci punctele E, A, F sunt coliniare. Notăm cu C mijlocul segmentului $[EF]$. Este evident că C este un punct fix. Avem şi că $m(\angle BME) = m(\angle BNF) = 90°$, de unde $ME \perp MN$ şi $NF \perp MN$, deci $ME \parallel NF$. Atunci $MNFE$ este trapez sau dreptunghi, iar CP este linie mijlocie, deci $CP \perp MN$. Prin urmare punctul P se află pe cercul de diametru $[BC]$.

Reciproc, orice punct de pe acest cerc este mijlocul unui segment $[MN]$ cu $M \in \mathscr{C}_1$, $N \in \mathscr{C}_2$ cu $MN \ni B$. Într-adevăr, dacă P este un punct de pe acest cerc, ducem paralelele din E, F la CP. Ele intersectează $\mathscr{C}_1$ şi $\mathscr{C}_2$ în M, respectiv N. Atunci $m(\angle EMB) = m(\angle FNB) = 90°$, deci M, N, B, P sunt coliniare. CP este linie mijlocie în trapezul (sau dreptunghiul) $MNFE$, deci P este mijlocul lui $[MN]$. (Dacă $P = A$ atunci $M = A$ şi $N = A$). Prin urmare locul geometric al punctului P este cercul de diametrul $[BC]$.

Fie D mijlocul segmentului $[BC]$, Q centrul de greutate al triunghiului ABC şi G centrul de greutate al triunghiului AMN. Atunci $\dfrac{AQ}{AD} = \dfrac{2}{3} = \dfrac{AG}{AP}$, deci $QG \parallel PD$ şi $QG = \dfrac{2}{3}PD = \dfrac{1}{3}BC$, Rezultă că G se află pe cercul de centru Q şi rază $\dfrac{BC}{3}$. Reciproc, dacă un punct G se află pe cercul de centru Q şi rază $\dfrac{BC}{3}$, considerăm punctul $P \in (AG$ pentru care $\dfrac{AG}{AP} = \dfrac{2}{3} = \dfrac{AQ}{AD}$. Atunci $QG \parallel DP$ şi

$DP = \frac{3}{2} QG = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3} BC = \frac{1}{2} BC$, deci P se află pe cercul cu centrul în D şi rază $\frac{BC}{2}$.

Dacă nu acceptăm dreptele pentru care figura este degenerată, din locul geometric găsit trebuie eliminate punctele ce corespund acestor drepte (pentru dreapta $d = AB$, când $M = N = P = A$, ar trebui să scoatem punctul A).



Observaţie: Omotetia de centru A şi raport $\frac{2}{3}$ transformă cercul $\mathscr{C}\left(D, \frac{BC}{2}\right)$ în cercul $\mathscr{C}\left(Q, \frac{BC}{3}\right)$. Prin această omotetie, punctul mobil P este transformat în punctul (mobil) G (centrul D al primului cerc este şi el transformat în centrul celui de-al doilea cerc).