Clasa a X-a - Etapa I - Problema 3

Enunţ. Într-o sală există 2019 întrerupătoare, corespunzător la 2019 becuri. Iniţial toate becurile sunt stinse. În sală intră succesiv 2019 copii. Fiecare copil schimbă stare becurilor corespunzător întrerupătoarelor pe care le atinge, adică dacă becul era stins îl aprinde, iar dacă becul era aprins îl va stinge. Se ştie că acel copil care are numărul k apasă pe întrerupătoare din k în k, începând cu primul, pentru orice $k \in \{1, 2, 3, ..., 2019\}$. De exemplu, al cincilea copil apasă pe întrerupătoarele $1, 6, 11, 16$ etc. Determinaţi numărul de becuri rămase aprinse după ce toţi cei 2019 copii au trecut prin sală.

Soluţie. Evident că un bec va rămâne aprins la final dacă întrerupătorul corespunzător este atins de un număr impar de copii. De exemplu, primul bec va fi la final aprins.

Fie $l \geq 2$. Să remarcăm că starea becului cu numărul becul cu numărul l este modificată de copilul cu numărul k dacă şi numai dacă $l - 1$ se divide cu k. Prin urmare, becul cu numărul l va fi la final aprins doar dacă $l - 1$ are număr impar de divizori, adică $l - 1$ este pătrat perfect. Celmai mare pătart perfect, mai mic decât 2019, este $44^2 = 1936$, deducem că $l - 1 \in \{1^2, 2^2, ..., 44^2\}$. Ţinând cont de observaţia iniţială, deducem că sunt 45 de becuri care rămân aprinse. $\square$