Arătaţi că, pentru orice numere reale a şi b este adevărată inegalitatea

$$(1+a^2)(1+b^2) \geq a(1+b^2) + b(1+a^2).$$

Când are loc egalitatea?

Olimpiadă Slovenia, 2007

Soluţie.
Din $(a-1)^2 \geq 0$, $\forall\, a \in \mathbb{R}$ rezultă $1 + a^2 \geq 2a$, $\forall\, a \in \mathbb{R}$, cu egalitate dacă şi numai dacă $a = 1$.
Înmulţind această relaţie cu $1 + b^2 > 0$ obţinem $(1+a^2)(1+b^2) \geq 2a(1+b^2)$, cu egalitate pentru $a = 1$. Analog rezultă că $(1+a^2)(1+b^2) \geq 2b(1+a^2)$, cu egalitate pentru $b = 1$. Adunând termen cu termen aceste ultime două inegalităţi, obţinem $2(1+a^2)(1+b^2) \geq 2a(1+b^2) + 2b(1+a^2)$, de unde rezultă imediat inegalitatea din enunţ. Egalitatea are loc dacă $a = b = 1$.