Etapa 3, Problema 4

Determinaţi numărul funcţiilor $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ cu proprietăţile:

a) $f(f(n)+n) = f(n), \forall n \in \mathbb{N}$;

b) $f(2012) = 1$.

***

Soluţie.

Prin inducţie matematică, deducem că

$$f(n) = 1, \forall n \geq 2012. \qquad (*)$$

Dacă presupunem prin absurd că ar exista $p \in \{0, 1, 2, .., 2011\}$ astfel încât $f(p) = q > 1$, atunci

$$f(f(p)+p) = f(p) \Leftrightarrow f(p+q) = q.$$

Apoi

$$f(f(p+q)+p+q) = f(p+q) \Leftrightarrow f(p+2q) = q$$

şi, inductiv, obţinem că $f(p+kq) = q$ pentru orice $k \in \mathbb{N}$, ceea ce vine în contradicţie cu (*). Prin urmare, $f(n) \in \{0, 1\}$, oricare ar fi $n \in \{0, 1, 2, ..., 2012\}$.

În acest moment este evident că, dacă există $p \in \{0, 1, 2..., 2011\}$ pentru care $f(p) = 1$, atunci vom avea $f(q) = 1$ pentru orice $q \in \{p, p+1, .., 2011\}$. Prin urmare, soluţiile problemei sunt funcţiile

$$f_p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, f_p(x) = 1,\ n \geq p \texttt{ şi } f_p(n) = 0 \texttt{ în rest},$$

pentru orice $p \in \{0, 1, 2, .., 2012\}$. În concluzie, sunt 2013 funcţii cu proprietăţile dorite.