Problema 1. Fie n un număr natural nenul şi p un număr prim impar astfel încât $n|p-1$ şi $p|n^3-1$. Demonstraţi că $4p-3$ este pătrat perfect.

Soluţie: Evident, $n-1<p \Rightarrow (n-1;p)=1$.

Cum $p|n^3-1=(n-1)(n^2+n+1)$, obţinem că $p|n^2+n+1$.

Vom demonstra că $p=n^2+n+1$.

Fie $p-1=qn$. Dacă $n \leq \sqrt{p}$, atunci $p \leq n^2+n+1 < 2p$, de unde $p=n^2+n+1$.

Dacă $n > \sqrt{p}$, atunci $q < \sqrt{p}$. Prin urmare

$$p|n^2+n+1=\frac{(p-1)^2}{q^2}+\frac{p-1}{q}+1=\frac{(p-1)^2+q(p-1)+q^2}{q^2}.$$

Numărătorul ultimei fracţii este congruent cu $(-1)^2-q+q^2$ modulo p. Deoarece $(p;q)=1$, obţinem că $p|q^2-q+1$. Dar $q^2-q+1<p-q+1\leq p$, contradicţie.

Aşadar $p=n^2+n+1$, de unde $4p-3=(2n+1)^2$.