Etapa 2, Problema 3

Fie $n \geq 2$ un număr natural şi mulţimea

$$M = \{1,\ 2,\ 3, ..., (n-1)\, n\}.$$

Câte dintre ecuaţiile $x^2 - 2px + q = 0$, cu $p, q \in M$, au soluţiile reale?

G. Manole, Gazeta Matematică 7/1988

Soluţie.

Trebuie determinat numărul perechilor $(p, q) \in M \times M$ cu proprietatea că $q \leq p^2$ (condiţie echivalentă cu $\Delta \geq 0$).

Pentru $p \in \{1,\ 2,\ ...,\ (n-1)\}$, inecuaţia $q \leq p^2$ are soluţiile $q \in \left\{1,\ 2,\ ...,\ p^2\right\}$, deci are p^2 soluţii.

Pentru $p \in \{n,\ n+1,\ ...,\ (n-1) \cdot n\}$, orice element al lui M este soluţie a inecuaţiei $q \leq p^2$, prin urmare acesta are $(n-1) \cdot n$ soluţii.

Numărul ecuaţiilor care au soluţiile reale este

$$\sum_{p=1}^{n-1} p^2 + \sum_{p=n}^{(n-1)n} (n-1)\, n = \frac{n\,(n-1)\,(2n-1)}{6} + n\,(n-1)^3 =$$

$$= \frac{n\,(n-1)\left(6n^2 - 10n + 5\right)}{6}.$$