P2. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ şi $(b_n)_{n\geq 1}$ două şiruri de numere reale care verifică următoarele condiţii:
i) $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este strict monoton;
ii)$_{\frac{\infty}{\infty}}$ $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} b_n=\infty$ sau ii)$_{\frac{0}{0}}$ $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} a_n=\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} b_n=0$.
Arătaţi că

$$\liminf \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}\leq \liminf \frac{a_n}{b_n}\leq \limsup \frac{a_n}{b_n}\leq \limsup \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}\,.$$

S. Vom considera pentru început cazul "$\frac{\infty}{\infty}$" şi demonstrăm inegalitatea $\limsup \frac{a_n}{b_n}\leq \limsup \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$.
Dacă $\limsup \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=\infty$, inegalitatea este evidentă.
Să considerăm deci că $\limsup \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}<\infty$ şi fie $\infty>l>\limsup \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$. Există atunci $n_0\in\mathbb{N}$ cu proprietatea că

$$\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}<l \quad, (\forall) n\geq n_0.$$

Rezultă că $a_{n+1}-a_n<l(b_{n+1}-b_n)$, $(\forall) n\geq n_0$. Obţinem că

$$a_n-a_{n_0}=\sum_{k=n_0}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)<l\sum_{k=n_0}^{n-1}(b_{k+1}-b_k)=l(b_n-b_{n_0})\,,$$

de unde

$$\frac{a_n}{b_n}<l+\frac{a_{n_0}}{b_n}-\frac{lb_{n_0}}{b_n},\ (\forall) n\geq n_0.$$

Obţinem atunci că $\limsup \frac{a_n}{b_n}\leq l$. Cum această inegalitate are loc pentru orice $l\in\left(\limsup \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n},\infty\right)$, rezultă că

$$\limsup \frac{a_n}{b_n}\leq \limsup \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}\,.$$

Analog, se verifică şi inegalitatea

$$\liminf \frac{a_n}{b_n}\geq \liminf \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}\,.$$

Să considerăm acum cazul "$\frac{0}{0}$". Fără a restrânge generalitatea putem presupune că $b_n>0, (\forall) n\in\mathbb{N}$ şi atunci $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este un şir strict descrescător cu $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} b_n=0$. Demonstrăm din nou inegalitatea $\limsup \frac{a_n}{b_n}\leq \limsup \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$.
Ca şi în cazul precedent, dacă $\limsup \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=\infty$, inegalitatea este evidentă.
Dacă $\limsup \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}<\infty$, fie $\limsup \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}<l<\infty$. Există atunci $n_0\in\mathbb{N}$ cu proprietatea că

$$\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}<l \quad, (\forall) n\geq n_0.$$

Rezultă că $a_{n+1}-a_n>l(b_{n+1}-b_n)$, $(\forall) n\geq n_0$ şi

$$a_{n+p}-a_n>l(b_{n+p}-b_n),\ (\forall) n\geq n_0,\ (\forall) p\in\mathbb{N}^*.$$

Dar atunci

$$-a_n=\lim_{p\longrightarrow\infty}(a_{n+p}-a_n)\geq l\cdot \lim_{p\longrightarrow\infty}(b_{n+p}-b_n)=-l\cdot b_n \qquad (\forall) n\geq n_0,$$

de unde

$$\frac{a_n}{b_n}\leq l \quad, (\forall) n\geq n_0$$

şi obţinem că $\limsup \frac{a_n}{b_n}\leq l$. Deducem că $\limsup \frac{a_n}{b_n}\leq \limsup \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$. Analog se obţine şi inegalitatea $\liminf \frac{a_n}{b_n}\geq \liminf \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$.