P4. Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ cu proprietatea că $|det(A + z \cdot B)| \leq 1$, pentru orice $z \in \mathbb{C}$, cu $|z| = 1$.
a) Arătaţi că $|det(A) + z \cdot det(B)| \leq 1$, pentru orice $z \in \mathbb{C}$, cu $|z| = 1$.
b) Dacă $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, arătaţi că $det(A)^2 + det(B)^2 \leq 1$.

R: Pentru $z \in \mathbb{C}$, cu $|z| = 1$ fixat, fie $w \in \mathbb{C}$ o rădăcină a sa de ordin n. Atunci

$$det(A) + z \cdot det(B) = det(A) + w^n \cdot det(B) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} det(A + \varepsilon^k \cdot w \cdot B)\,,$$

unde ε este o rădečină primitivă de ordinul n a unităţii(de ex. $\varepsilon = cos\frac{2\pi}{n} + i \cdot sin\frac{2\pi}{n}$). Atunci

$$|det(A) + z \cdot det(B)| \leq \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} |det(A + \varepsilon^k \cdot w \cdot B)| \leq 1\,.$$

b) Pentru $z = i$ obţinem că

$$det^2(A) + det^2(B) = |det(A) + i \cdot det(B)|^{\leq} 1\,.$$