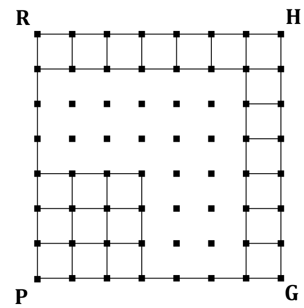
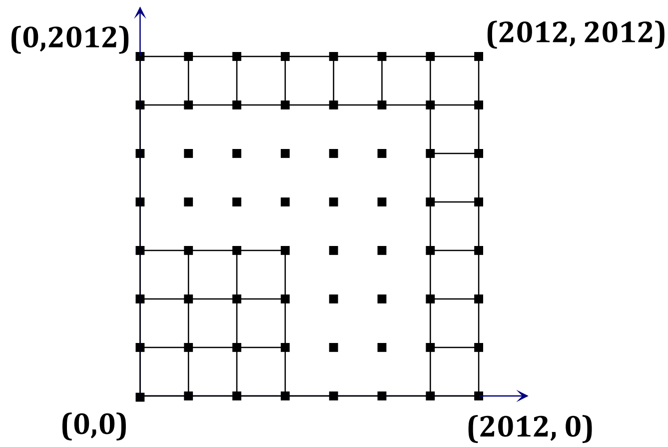
Problema 2. *Doi luptători kung-fu Pai și Hai se provoacă la o luptă pe butuci. Punctele din figura alăturată reprezintă distribuția butucilor. Pe fiecare linie și coloană sunt 2013 butuci. Inițial Hai se află în puntul H, iar Pai în punctul P. La fiecare semnal al unui arbitru, ales de comun acord, fiecare luptător sare pe butucul vecin astfel: Pai sare spre nord sau est, iar Hai sare spre sud sau vest. Care este probabilitatea ca acești luptători să se întâlnească pe unul dintre butuci?*



Prelucrare după M. Klamkin & A. Liu

Soluție: Folosim următorul sistem de coordonate.



Dacă Pai se află în punctul (p,r) atunci la următorul pas se va afla în punctul $(p,r+1)$ sau $(p+1,r)$. Dacă Hai se află în punctul (h,k), la următorul pas se va afla în punctul $(h-1,k)$ sau $(h,k-1)$. Aceasta demonstrează că suma coordonatelor celor doi, în orice moment, rămâne aceeași, deci egală cu cea inițială, adică 4024. Prin urmare cei doi se vor întâlni într-un punct $I(i,2012-i)$. Numărul de drumuri posibile pentru Pai din punctul $(0,0)$ la punctul I este C_{2012}^{i}, iar numărul drumurilor posibile pentru Hai din punctul $(2012, 2012)$ la punctul I este C_{2012}^{2012-i}.

Atunci numărul de posibilități de întâlnire este $\sum_{i=0}^{2012} C_{2012}^{i} C_{2012}^{2012-i} = C_{4024}^{2012}$.

Dar orice drum al lui Pai începe în punctul $(0,0)$ și se finalizează într-un punct de forma $(2012,k)$ sau $(2012,k)$, deci sunt $2\cdot\sum_{k=0}^{2012} C_{2012}^{k}$ drumuri pe care le poate face, adică 2^{2013}. Analog pentru Hai. Prin urmare probabilitatea căutată este $\frac{C_{4024}^{2012}}{2^{2013}\cdot 2^{2013}}$.