Aflaţi numerele naturale distincte a, b, c, d care satisfac $ab = cd = a + b + c + d - 3$.

* * *

Soluţia 1.
Să observăm mai întâi că numerele sunt nenule. Dacă, de exemplu, $a = 0$, atunci $cd = ab = 0$ implică $c = 0$ sau $d = 0$, ceea ce contrazice faptul că numerele sunt distincte.
Presupunem deocamdată că d este cel mai mare dintre numerele a, b, c, d. Atunci $cd = a + b + c + d - 3 < 4d - 3 < 4d$, deci $c < 4$.
• Dacă $c = 1$ atunci $d = a + b + 1 + d - 3$ implică $a + b = 2$, deci fie $a = b = 1$ (nu convine), fie $a = 0$ sau $b = 0$ ceea ce, am văzut, nu convine.
• Dacă $c = 2$, obţinem $ab = 2d = a + b + 2 + d - 3$, deci $d = a + b - 1$ şi $2d = ab$, de unde $ab = 2(a + b - 1)$, care se mai scrie succesiv:
$ab - 2a - 2b + 2 = 0 \Leftrightarrow ab - 2a - 2b + 4 = 2 \Leftrightarrow a(b - 2) - 2(b - 2) = 0 \Leftrightarrow (a - 2)(b - 2) = 2$, cu soluţiile $(a, b) \in \{(0, 1), (1, 0), (3, 4), (4, 3)\}$. Am văzut că $a = 0$ sau $b = 0$ nu convin, iar pentru celelalte două soluţii rezultă $d = 6$.
Am obţinut aşadar soluţiile $(3, 4, 2, 6)$ şi $(4, 3, 2, 6)$.
• Dacă $c = 3$, condiţia $cd = a + b + c + d - 3$ devine $2d = a + b$. Cum însă $d > a$ şi $d > b$, această condiţie nu poate fi îndeplinită.

Renunţând la condiţia ca d să fie cel mai mare dintre numerele a, b, c, d, obţinem în final soluţiile: $(3, 4, 2, 6)$, $(4, 3, 2, 6)$, $(3, 4, 6, 2)$, $(4, 3, 6, 2)$, $(2, 6, 3, 4)$, $(2, 6, 4, 3)$, $(6, 2, 3, 4)$, $(6, 2, 4, 3)$.

Observaţie. Ecuaţia $ab - 2a - 2b + 2 = 0$ la care s-a ajuns în cazul $c = 2$ putea fi rezolvată şi astfel:
$a(b-2) = 2b-2$ implică mai întâi $b \neq 2$, apoi $a = \dfrac{2b - 2}{b - 2} \in \mathbb{N}^*$, adică $b - 2 \mid 2b - 2$.
Cum $b - 2 \mid 2(b - 2)$, adică $b - 2 \mid 2b - 4$, rezultă că $b - 2$ divide şi diferenţa $(2b - 2) - (2b - 4) = 2$, deci $b - 2 \in \{-2, -1, 1, 2\}$, adică $b \in \{0, 1, 3, 4\}$. Însă $b = 0$ nu convine iar $b = 1$ conduce la $a = 0$ care nu convine, aşadar $b = 3$ (şi $a = 4$) sau $b = 4$ (şi $a = 3$).

Soluţia 2. (dată de Adrian Badea)
Fie a, b, c, d numere naturale disticte care satisfac ecuaţia din enunţ.
Dacă $a = 0$, atunci $cd = 0$, deci $c = 0$ sau $d = 0$, fals. Analog $b = 0$, $c = 0$, $d = 0$ contrazic faptul că numerele sunt distincte.

Dacă $a = 1$, $b = cd = 1 + b + c + d - 3$, deci $c + d = 2$, de unde, cum numerele sunt nenule, $c = d = 1$, fals. Analog rezultă că $b \neq 1$, $c \neq 1$, $d \neq 1$.

Dacă $a, b, c, d \geq 2$, avem $ab = a + b + c + d - 3$ şi $cd = a + b + c + d - 3$. Adunând cele două relaţii obţinem $ab + cd = 2a + 2b + 2c + 2d - 6$, adică $ab - 2a - 2b + 4 + cd - 2c - 2d + 4 = 2$, sau $a(b - 2) - 2(b - 2) + c(d - 2) - 2(d - 2) = 2$, deci $(a - 2)(b - 2) + (c - 2)(d - 2) = 2$.

Distingem cazurile: a) Dacă $a = 2$ (cazurile $b = 2$, $c = 2$, şi $d = 2$ sunt analoage) atunci $(c-2)(d-2)=2$, de unde avem fie $c-2=1$ şi $d-2=2$, deci $c=3$, $d=4$, $ab=12$, de unde $b=6$, deci soluţia $(2,6,3,4)$, fie $d-2=1$ şi $c-2=2$, deci $d=3$, $c=4$, $ab=12$, deci $b=6$ deci soluţia (2,6,4,3). În cazurile analoage se obţin soluţiile: dacă $b=2$: (6,2,3,4) şi (6,2,4,3), dacă $c=2$: (3,4,2,6) şi (4,3,2,6), iar dacă $d=2$: (3,4,6,2) şi (4,3,6,2).

b) Dacă $a,b,c,d \geq 3$, atunci $a-2 \geq 1$,$b-2 \geq 1$, $c-2 \geq 1$, $d-2 \geq 1$, deci $(a-2)(b-2) \geq 1$ şi $(c-2)(d-2) \geq 1$, de unde, prin adunare, $(a-2)(b-2)+(c-2)(d-2) \geq 2$. Dar avem $(a-2)(b-2)+(c-2)(d-2)=2$, deci $(a-2)(b-2)=1$, de unde $a-2=b-2=1$, adică $a=b=3$, fals.
Aşadar în cazul al doilea nu avem soluţii.