Problema 1. Arătaţi că dacă $a, b, c, d, e \in (0, \infty)$, atunci

$$\frac{a}{b+2c+3d+4e} + \frac{b}{c+2d+3e+4a} + \frac{c}{d+2e+3a+4b} +$$

$$+ \frac{d}{e+2a+3b+4c} + \frac{e}{a+2b+3c+4d} \geq \frac{1}{2}.$$

* * *

Soluţie:
Avem, folosind inegalitatea Cauchy-Buniakovski-Schwarz,

$$\sum_{cicl} \frac{a}{b+2c+3d+4e} = \sum_{cicl} \frac{a^2}{ab+2ac+3ad+4ae} \overset{CBS}{\geq}$$

$$\frac{(a+b+c+d+e)^2}{5(ab+ac+ad+ae+bc+bd+be+cd+ce+de)} \geq \frac{1}{2},$$

ultima inegalitate fiind echivalentă cu

$$2(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2) + 4(ab+ac+ad+ae+bc+bd+be+cd+ce+de) \geq$$

$$5(ab+ac+ad+ae+bc+bd+be+cd+ce+de),$$

deci cu

$$4(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2) - 2(ab+ac+ad+ae+bc+bd+be+cd+ce+de) \geq 0,$$

care se mai scrie $(a-b)^2 + (a-c)^2 + (a-d)^2 + (a-e)^2 + (b-c)^2 + (b-d)^2 + (b-e)^2 + (c-d)^2 + (c-e)^2 + (d-e)^2 \geq 0$ şi care este evidentă.
Egalitate avem dacă şi numai dacă $a = b = c = d = e$.