Clasa a X-a - Problema 2

Enunț:

a) Să se arate că $\forall n \in \mathbb{N}$, numărul $\sqrt{4n+2}$ este irațional

b) Să se arate că $\forall n \in \mathbb{N}$, au loc egalitățile

$$\left[\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right]=\left[\sqrt{4n+1}\right]=\left[\sqrt{4n+2}\right],$$

unde cu $[a]$ notăm partea întreagă a numărului real a.

Soluție:

a) Numărul $4n+2$ nu este pătrat perfect deorece pătratele perfecte dau restul 0 sau 1 la împărțirea cu 4.

b) Avem $\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)^2=2n+1+2\sqrt{n(n+1)}>4n+1$. Apoi $\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)^2=2n+1+2\sqrt{n(n+1)}<2n+1+2\left(n+\frac{1}{2}\right)=4n+2$, de unde

$$\sqrt{4n+1}<\sqrt{n}+\sqrt{n+1}<\sqrt{4n+2}.$$

Fie $k=\left[\sqrt{4n+1}\right]$. Atunci

$k^2\le 4n+1<k^2+2k+1 \Rightarrow 4n+2<k^2+2k+2 \Rightarrow 4n+2\le k^2+2k+1$. Dar $4n+2$ nu este pătrat perfect, deci $4n+2<k^2+2k+1$, de unde

$$k^2\le\sqrt{4n+1}<\sqrt{4n+2}<(k+1)^2,$$

de unde obținem concluzia.