Problema 1. Dintre cifrele de la 1 la 9 se iau la întâmplare 4 cifre distincte şi se calculează suma tuturor numerelor de 4 cifre distincte care se pot forma cu acestea. Să se determine cel mai mare divizor comun al tuturor sumelor care se pot obţine prin acest procedeu.

* * *

Soluţie

Fie a_1, a_2, a_3, a_4 - cifrele alese.

Un număr format cu ele are forma $\overline{a_1a_2a_3a_4} = a_1 \cdot 1000 + a_2 \cdot 100 + a_3 \cdot 10 + a_4$.

Sunt $4! = 24$ numere care se pot forma cu cele 4 cifre. În cele 24 de numere, fiecare cifră apare pe aceeaşi poziţie de exact $3! = 6$ ori, rezultă că suma celor 24 numere este de forma:

$$6 \cdot [1000 \cdot (a_1 + a_2 + a_3 + a_4) + 100 \cdot (a_1 + a_2 + a_3 + a_4) + 10 \cdot (a_1 + a_2 + a_3 + a_4)]$$

$$\text{sau } 6 \cdot (a_1 + a_2 + a_3 + a_4) \cdot (1000 + 100 + 10 + 1) = 6666 \cdot (a_1 + a_2 + a_3 + a_4)$$

Vom arăta că cel mai mare divizor comun al sumelor $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ este 1.

Alegând cifrele $9, 8, 7, 5$ obţine suma $9 + 8 + 7 + 5 = 29$ care este număr prim, iar alegând cifrele $1, 2, 3, 5$ obţinem $1 + 2 + 3 + 5 = 11$ care este tot număr prim. Cum $(11, 29) = 1 \Rightarrow$ afirmaţia de mai sus este adevărată.

În concluzie, cel mai mare divizor comun al sumelor este 6666.

Tudor Coman, ICHB, clasa a VI-a