



Problema 1. Arătați că:

a) $\frac{1}{2} + \frac{3}{2 \cdot 4} + \frac{5}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \cdots + \frac{2013}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2014} < 1,$

b) $\frac{1}{2} + \frac{2}{1 \cdot 3} + \frac{3}{2 \cdot 4} + \frac{4}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \frac{5}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \cdots + \frac{2012}{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 2013} + \frac{2013}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2014} < 2.$

* * *

Soluție:

a) Putem scrie că $S_1 \stackrel{\text{not.}}{=} \frac{1}{2} + \frac{3}{2 \cdot 4} + \frac{5}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \cdots + \frac{2013}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2014} =$

$$\frac{2-1}{2} + \frac{4-1}{2 \cdot 4} + \frac{6-1}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \cdots + \frac{2014-1}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2014} =$$
$$\frac{2}{2} - \frac{1}{2} + \frac{4}{2 \cdot 4} - \frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{6}{2 \cdot 4 \cdot 6} - \frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \cdots + \frac{2014}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2012 \cdot 2014} - \frac{1}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2014} =$$
$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{2 \cdot 4} - \frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \cdots + \frac{1}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2012} - \frac{1}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2014}.$$

Observăm că fiecare fracție negativă, cu excepția ultimeia, este urmată în sumă de opusul ei. Acești termeni se reduc aşadar, iar suma rămasă este

$$S_1 = 1 - \frac{1}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2014} \text{ care este evident mai mică decât } 1.$$

b) Separăm termenii sumei în două grupe: cei cu numitorul par și respectiv cei cu numitorul impar. Suma fracțiilor cu numitorul par este tocmai suma S_1 calculată mai sus, despre care am arătat că este mai mică decât 1. Vom arăta că și suma termenilor cu numitorul impar este mai mică decât 1. Avem:

$$S_2 \stackrel{\text{not.}}{=} \frac{2}{1 \cdot 3} + \frac{4}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \cdots + \frac{2012}{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 2013} = \frac{3-1}{1 \cdot 3} + \frac{5-1}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \cdots + \frac{2013-1}{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 2013} =$$
$$\frac{3}{1 \cdot 3} - \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{5}{1 \cdot 3 \cdot 5} - \frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \cdots + \frac{2013}{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 2011 \cdot 2013} - \frac{1}{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 2013} =$$
$$1 - \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 3} - \frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \cdots + \frac{1}{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 2011} - \frac{1}{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 2013}.$$

Ca și la suma S_1 , fiecare fracție negativă, cu excepția ultimeia, este urmată în sumă de opusul ei, prin urmare $S_2 = 1 - \frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot 2013}$, care este evident mai mică decât 1. Prin urmare, suma căutată, $S_1 + S_2$, este mai mică decât 2.