Problema 3. Fie a, b, c numere reale cu $a, b, c > 0$ şi $a + b + c = 3$. Să se arate că

$$(a+b)^2a + (b+c)^2b + (c+a)^2c \geq \frac{36abc}{a^2+b^2+c^2}.$$

Alexandru Mihalcu, elev, Bucureşti

Soluţia 1: Avem, succesiv,

$$(a+b)^2a+(b+c)^2b+(c+a)^2c = \frac{(a+b)^2}{\frac{1}{a}} + \frac{(b+c)^2}{\frac{1}{b}} + \frac{(c+a)^2}{\frac{1}{c}} \overset{(*)}{\geq} \frac{4(a+b+c)^2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} =$$

$$\frac{36}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} = \frac{36}{\frac{ab+bc+ca}{abc}} = \frac{36abc}{ab+bc+ca} \overset{(**)}{\geq} \frac{36abc}{a^2+b^2+c^2}.$$

La inegalitatea $(*)$ s-a folosit *inegalitatea Cauchy-Buniakowski-Schwarz* sub forma prezentată în materialul teoretic, iar la $(**)$ s-a folosit cunoscuta inegalitate $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$ (echivalentă cu $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \geq 0$).

Cazul de egalitate are loc dacă avem egalitate atât în $(*)$ cât şi în $(**)$, adică atunci când sunt satisfăcute relaţiile $\frac{a+b}{\frac{1}{a}} = \frac{b+c}{\frac{1}{b}} = \frac{c+a}{\frac{1}{c}}$ (cazul de egalitate pentru $(*)$), $a = b = c$ (cazul de egalitate pentru $(**)$) şi $a+b+c = 3$, relaţii satisfăcute dacă şi numai dacă $a = b = c = 1$.

Soluţia 2: Împărţind-o cu $abc > 0$, inegalitatea de demonstrat se rescrie echivalent $\frac{(a+b)^2}{bc} + \frac{(b+c)^2}{ca} + \frac{(c+a)^2}{ab} \geq \frac{36}{a^2+b^2+c^2}$.

Dar, din inegalitatea Cauchy-Buniakowsky-Schwarz, avem că $\frac{(a+b)^2}{bc} + \frac{(b+c)^2}{ca} + \frac{(c+a)^2}{ab} \geq \frac{((a+b)+(b+c)+(c+a))^2}{bc+ca+ab} = \frac{36}{ab+bc+ca} \geq \frac{36}{a^2+b^2+c^2}$.

Din nou se vede uşor că egalitatea se realizează dacă şi numai dacă $a = b = c = 1$.