Problema 4. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Determinaţi mulţimile $A \subset \mathbb{N}^*$, cu $\text{card}(A) = n$, care au proprietatea că

$$\Big\{s(B) \mid B \subseteq A, B \neq \varnothing\Big\} = \Big\{1, 2, 3, \dots, 2^n - 1\Big\},$$

unde $s(B)$ desemnează suma elementelor mulţimii B.

Cristi Săvescu, Focşani

Soluţie. Din considerente de scriere în baza 2 a numerelor naturale $1, 2, 3, \dots, 2^n - 1$, observăm că mulţimea $A = \{1, 2, 2^2, \dots, 2^{n-1}\}$ verifică ipoteza. Arătăm că aceasta este unica mulţime care satisface ipoteza.

Cum $\{B \mid B \subseteq A, B \neq \emptyset\}$ are exact $2^n - 1$ elemente, condiţia din ipoteză ne spune că orice două sumbmulţimi nevide şi distincte ale lui A au sumele elementelor distincte, iar acestea formează chiar şirul $1, 2, \dots, 2^n - 1$, (1).

Vom arăta inductiv că $2^k \in A$, pentru orice $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$. Cazul $k = 0$ este imediat din minimalitatea lui 1 ca suma a elementelor unei submulţimi nevide a lui A. Mai departe, presupunem că $1, 2, \dots, 2^{k-1} \in A$ şi arătăm că $2^k \in A$. Observăm că submulţimile lui $\{1, 2, \dots, 2^{k-1}\}$, care sunt toate şi submulţimi ale lui A, generează sumele $1, 2, 3, \dots, 2^k - 1$. Atunci, din (1) rezultă că $A \cap \{1, 2, 3, \dots, 2^k - 1\} = \{1, 2, 2^2, \dots, 2^{k-1}\}$. Dar 2^k este şi el sumă a elementelor unei submulţimi a lui A, iar din minimalitatea acestuia ca posibil nou element al lui A deducem că $2^k \in A$.

Rezultă că $\{1, 2, 2^2, \dots, 2^{n-1}\} \subseteq A$. Pe de altă parte, avem $|A| = n$, prin urmare $A = \{1, 2, 2^2, \dots, 2^{n-1}\}$.