Problema 2. a) Demonstrați că pentru orice număr natural nenul n și pentru orice $x \in (0,1)$, avem:

$$\frac{x}{n^2-\left(n^2-1\right)\cdot x} \geq x-\frac{n-1}{n+1}.$$

b) Dacă $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ și $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1} \in (0,+\infty)$, cu $\frac{1}{1+x_1}+\frac{1}{1+x_2}+\ldots+\frac{1}{1+x_{n+1}}=n$, arătați că:

$$\frac{1}{1+n^2\cdot x_1}+\frac{1}{1+n^2\cdot x_2}+\ldots+\frac{1}{1+n^2\cdot x_{n+1}} \geq 1.$$

***

Soluție. a) Pentru $n=1$, inegalitatea devine $x \geq x$, adevărat. Pentru $n \geq 2$, deoarece numitorul fracției din membrul stâng este strict pozitiv, înmulțind cu numitorii și grupând, obținem că inegalitatea este echivalentă cu: $(n-1)\left((n+1)x-n\right)^2$, care este adevărată pentru orice $x \in (0,1)$.

b) Pentru $k \in \{1, 2, \ldots, n+1\}$, notăm $y_k=\frac{1}{1+x_k}$. Rezultă că $y_1+y_2+\ldots+y_{n+1}=n$ și pentru orice $k \in \{1, 2, \ldots, n+1\}$, avem $y_k \in (0,1)$.

Cu aceste notații, obținem $\frac{1}{1+n^2\cdot x_k}=\frac{y_k}{n^2-\left(n^2-1\right)\cdot y_k}$, $\forall k=\overline{1,\, n+1}$. Folosind **a)**, rezultă:

$$\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{1+n^2\cdot x_k}=\sum_{k=1}^{n+1}\frac{y_k}{n^2-\left(n^2-1\right)\cdot y_k} \geq \sum_{k=1}^{n+1}\left(y_k-\frac{n-1}{n+1}\right)=n-(n+1)\cdot\frac{n-1}{n+1}=1.$$