Etapa 3, Problema 1

Considerăm $y_1, y_2, ..., y_n$ numere reale în progresie aritmetică neconstantă şi a, b două numere reale nenule. Demonstraţi că nu există funcţii injective $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu proprietatea că

$$f(ax + y_1) + f(ax + y_2) + ... + f(ax + y_n) = b, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Mihai Opincariu, RMT 3/2004

Soluţie.

Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie cu proprietatea din enunţ. Facem $x = 0$, apoi $x = \frac{r}{a}$ (unde r este raţia progresiei); obţinem că

$$f(y_1) + f(y_2) + ... + f(y_n) = b,$$

respectiv

$$f(r + y_1) + f(r + y_2) + ... + f(r + y_n) = b \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow f(y_2) + f(y_3) + ... + f(r + y_n) = b.$$

Prin scăderea acestor două relaţii găsim că $f(y_1) = f(r + y_n)$ şi, cum $r \neq 0$, rezultă că funcţia nu este injectivă.