MODULUL UNUI NUMĂR REAL

Rezumat. Materialul conține câteva proprietăți și rezultate legate de modulul unui număr real, precum și unele probleme reprezentative.

Lecția se adresează claselor a VII-a și a VIII-a.

Autor: Lucian Dragomir, Liceul Bănățean Oțelu Roșu

Data: 18 septembrie 2013

I. Definiții, proprietăți

• *Modulul* (sau *valoarea absolută*) al unui număr real x este numărul real notat $|x|$ și definit astfel:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

• Să remarcăm, de la început, o greșeală care apare frecvent în redactările unor elevi: de exemplu, se scrie

$$|x-3| = \begin{cases} x-3, & x \geq 0 \\ -x+3, & x < 0 \end{cases} \quad \text{în loc de} \quad |x-3| = \begin{cases} x-3, & x \geq 3 \\ -x+3, & x < 3. \end{cases}$$

• *Exemple:* $|2{,}34| = 2{,}34$, $|-3{,}14| = 3{,}14$.

• *Proprietăți:*

P1. $|x| \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
P2. $|x| = 0 \iff x = 0$.
P3. $|x|^2 = x^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
P4. $|-x| = |x|$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
P5. $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.
Generalizare: $|x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n| = |x_1| \cdot |x_2| \cdot \ldots \cdot |x_n|$, $\forall x_k \in \mathbb{R}$, $k = \overline{1,n}$.
P6. $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $y \neq 0$.
P7. $|x| - |y| \leq |x \pm y| \leq |x| + |y|$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.
P8. Pentru $a > 0$: $|x| = a \iff x = -a$ sau $x = a$.
P9. $|x| = |y| \iff x = y$ sau $x = -y$.
P10. Pentru $a > 0$: $|x| \leq a \iff x \in [-a, a]$.
P11. Pentru $a > 0$: $|x| \geq a \iff x \in (-\infty, -a] \cup [a, \infty)$.
P12. $\max(a,b) = \dfrac{a+b+|a-b|}{2}$ și $\min(a,b) = \dfrac{a+b-|a-b|}{2}$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$.

II. Probleme rezolvate

1. Să se rezolve ecuațiile: a) $|4x+1| = |1-2x|$; b) $|x-3| + |x-4| = 1$.

Soluție. a) Metoda uzuală constă în „explicitarea modulelor"; în acest caz putem evita această cale, folosind **P9**. Avem: $4x+1 = 1-2x$ sau $4x+1 = 2x-1$. Imediat ajungem la $x \in \{-1, 0\}$.

b) Se pare că nu avem altă posibilitate decât amintita „explicitare", așadar

$$|x-3| = \begin{cases} x-3, & x \geq 3 \\ -x+3, & x < 3 \end{cases} \quad \text{și} \quad |x-4| = \begin{cases} x-4, & x > 4 \\ -x+4, & x \leq 4. \end{cases}$$

Deosebim astfel trei cazuri:

(I) $x \in (-\infty, 3) \overset{\text{not.}}{=} D_1$. Ecuația este $3 - x + 4 - x = 1 \Rightarrow x = 3 \notin D_1$.

(II) $x \in [3, 4] \overset{\text{not.}}{=} D_2$. Ecuația este în acest caz $x - 3 + 4 - x = 1 \iff 1 = 1$, egalitate adevărată pentru orice $x \in [3, 4]$.

(III) $x \in (4, \infty) \overset{\text{not.}}{=} D_3$. În acest caz avem $x - 3 + x - 4 = 1 \Rightarrow x = 4 \notin D_3$.

În concluzie, mulțimea soluțiilor ecuației date este $S = [3, 4]$. □

2. Să se determine numerele întregi n pentru care $|4n+1| \leq |3n|$.

Soluție. Observăm că $n = 0$ nu este soluție a inecuației și astfel obținem inecuația echivalentă

$$\frac{|4n+1|}{|3n|} = \left|\frac{4n+1}{3n}\right| \leq 1, \quad \text{de unde} \quad -1 \leq \frac{4n+1}{3n} \leq 1.$$

Rezolvând cele două inecuații obținute, se ajunge la $n \in \left(-\infty, -\frac{1}{7}\right] \cup (0, \infty) = S_1$ și $n \in [-1, 0) = S_2$, de unde $n \in (S_1 \cap S_2) \cap \mathbb{Z} = \{-1\}$. Așadar există un singur număr întreg care satisface enunțul, anume $n = -1$. □

3. Să se arate că, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, este adevărată inegalitatea $|x-2| + |2x-3| + |3x-4| \geq 1$.

Soluție. Folosim **P4** și **P7** (inegalitățile modulului) în felul următor:

$$|x-2| + |2x-3| + |3x-4| = |x-2| + |2x-3| + |4-3x| \geq |x-2+2x-3+4-3x| = 1. \quad \square$$

4. Se consideră numerele reale a, b, c pentru care $|a| = |b+c|$, $|b| = |c+a|$, $|c| = |a+b|$.

(i) Arătați că există numere reale distincte și nenule care satisfac ipoteza.
(ii) Demonstrați că $ab + bc + ca \leq 0$.

Soluție. (i) Este suficient să dăm un exemplu: $a = 1$, $b = 2$, $c = -3$.

(ii) Ridicăm la pătrat egalitățile din ipoteză, adunăm egalitățile obținute și ajungem la

$$ab + bc + ca = -\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} \leq 0. \quad \square$$

5. Arătați că, dacă $x, y \in \mathbb{R}$, $|x| < 1$, $|y| < 1$, atunci $\left|\dfrac{x-y}{1-xy}\right| < 1$.

Soluție. Pentru simplificarea calculelor notăm $y = -t$, deci $|t| = |y| < 1$. Avem de arătat că $-1 < \dfrac{x+t}{1+xt} < 1$, unde $1 + xt > 0$. Folosim $1 + xt + x + t = (1+x)(1+t) > 0$ și $1 + xt - x - t = (1-x)(1-t) > 0$. □

6. Notăm cu S mulțimea soluțiilor ecuației $|x-2| + |x-4| = m$, $m \in \mathbb{R}$.

a) Studiați dacă există $m \in \mathbb{R}$ pentru care S conține exact 3 numere întregi.
b) Există un cel mai mic număr întreg m pentru care S conține exact două numere întregi?
c) Determinați S în cazul în care $m = 4$.

Soluție. Procedăm ca la problema 1 b) și avem:

(I) pentru $x \in (-\infty, 2) \overset{\text{not.}}{=} D_1$, ecuația este $2 - x + 4 - x = m \Rightarrow x = \frac{6-m}{2}$; aceasta este soluție a ecuației dacă și numai dacă $\frac{6-m}{2} \in D_1 \iff m > 2$;

(II) dacă $x \in [2, 4] \overset{\text{not.}}{=} D_2$, avem ecuația $x - 2 + 4 - x = m \iff 2 = m$; astfel, pentru $m = 2$ ecuația are o infinitate de soluții, anume orice $x \in D_2$, iar dacă $m \neq 2$ ecuația nu are soluții în acest caz;

(III) dacă $x \in (4, \infty) \overset{\text{not.}}{=} D_3$, avem $x - 2 + x - 4 = m \iff x = \frac{m+6}{2}$, care este soluție dacă și numai dacă $\frac{m+6}{2} \in D_3 \iff m > 2$.

Putem acum concluziona:

a) pentru $m = 2$ avem $S = [2, 4]$, care conține exact trei numere întregi: 2, 3 și 4;

b) pentru $m < 2$, $S = \varnothing$, iar pentru $m > 2$, $S = \left\{\frac{6-m}{2}, \frac{m+6}{2}\right\}$; ambele soluții sunt întregi dacă și numai dacă m este par, deci cel mai mic număr întreg m cu proprietatea cerută este $m = 4$;

c) pentru $m = 4$ avem $S = \{1, 5\}$. □

7. Se consideră $x \in \mathbb{R}^*$ pentru care $x^2 - ax + 1 = 0$, $a \in \mathbb{R}$. Determinați $a \in \mathbb{Z}$ pentru care $\left|x - \frac{1}{x}\right| \in \mathbb{Q}$.

Soluție. Deoarece $x \neq 0$, deducem $x + \frac{1}{x} = a$, de unde $x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = a^2$ și astfel

$$x^2 - 2 + \frac{1}{x^2} = a^2 - 4, \quad \text{adică} \quad \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = a^2 - 4.$$

Evident, se impune $a^2 - 4 \geq 0$ și, mai mult, $a^2 - 4 = k^2$, $k \in \mathbb{N}$. Se ajunge la $(a - k)(a + k) = 4$ și, analizând cazurile care apar, deducem $a = \pm 2$. Verificarea este imediată. □

8. Fie a și b două numere reale distincte.

a) Rezolvați ecuația $|x - a| + |x - b| = r$, unde r este un număr real oarecare.
b) Arătați că, dacă $|a - 1| + |b - 1| = |a| + |b| = |a + 1| + |b + 1|$, atunci $|a - b| \geq 2$.

Bogdan Enescu, Concursul „Unirea" 2006

Soluție. a) Notăm cu $S(r)$ mulțimea soluțiilor ecuației și considerăm $a < b$ (celălalt caz se tratează analog). Procedăm ca la problema 6 și deducem: pentru $r < b - a$, $S(r) = \varnothing$; pentru $r = b - a$, $S(r) = [a, b]$; iar pentru $r > b - a$, $S(r) = \left\{\frac{a + b - r}{2}, \frac{a + b + r}{2}\right\}$.

b) Notând cu r valoarea comună a celor trei expresii și presupunând $a < b$, din a) deducem $-1, 0, 1 \in S(r) = [a, b]$, cu $r = b - a$. Așadar $a \leq -1$ și $b \geq 1$, de unde $|a - b| = b - a \geq 2$. □

9. Se consideră expresia $E(x) = |x-1| + |x-2| + \ldots + |x-2008|$, $x \in \mathbb{R}$. Determinați valoarea minimă a expresiei considerate, precum și valorile lui x pentru care aceasta se realizează.

OL Arad 2008

Soluție. Mai general, considerăm $E(x) = |x - 1| + |x - 2| + \ldots + |x - 2n|$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$, și

folosim inegalitatea

$$|x-k|+|k+n-x|\geq|x-k+k+n-x|=n,$$

cu egalitate dacă și numai dacă $x\in[k,k+n]$. Adunând inegalitățile obținute pentru $k\in\{1,2,\ldots,n\}$, ajungem la $E(x)\geq n^2$, cu egalitate dacă și numai dacă $x\in[k,k+n]$ pentru orice k, adică $x\in[n,n+1]$. Valoarea minimă este deci n^2 și se obține pentru $x\in[n,n+1]$. Pentru $2n=2008$, adică $n=1004$, valoarea minimă este $1004^2=1\,008\,016$ și se obține pentru $x\in[1004,1005]$. □

10. Pentru orice $m\in\mathbb{R}$ se notează $A_m=\{x\in\mathbb{R}\mid|x-m|+|x+m|\leq 2m\}$. Determinați: a) A_m; b) $A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_{1993}$.

OL Prahova 1993

Soluție. a) Dacă $m<0$, evident $A_m=\varnothing$; dacă $m=0$, din $2|x|\leq 0$ deducem $A_0=\{0\}$, iar dacă $m>0$ avem

$$2m\geq|x+m|+|m-x|\geq|x+m+m-x|=2m,$$

așadar $|x+m|+|m-x|=2m$, de unde $A_m=[-m,m]$.

b) Observăm că, pentru orice $m\in\mathbb{N}^*$, avem $A_m\subset A_{m+1}$ și $A_m\neq A_{m+1}$; rezultă astfel că $\bigcap_{m=1}^{n}A_m=[-1,1]$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$. □

11. Să se arate că, dacă $a,b\in\mathbb{R}$ și $a+b=2$, atunci

$$\min(|a|,|b|)<1<\max(|a|,|b|)\iff ab\in(-3,1).$$

Dan Zaharia, ONM 1996

Soluție. Dacă $a+b=2$, atunci $\min(|a|,|b|)<1<\max(|a|,|b|)\iff|a|<1<|b|$ sau $|b|<1<|a|$, adică $a^2<1<b^2$ sau $b^2<1<a^2$. Acestea sunt echivalente cu

$$(a^2-1)(b^2-1)<0\iff(ab)^2-(4-2ab)+1<0\iff(ab+1)^2<4$$
$$\iff|ab+1|<2\iff ab\in(-3,1).$$ □

12. Determinați toate mulțimile finite X de numere reale care satisfac: $\forall x\in X\Rightarrow x+|x|\in X$.

Soluție. Observăm că X nu conține elemente strict pozitive: dacă am avea $a>0$, $a\in X$, am obține și $2a\in X$, apoi $4a\in X$, ..., $2^na\in X$, $\forall n\in\mathbb{N}$, adică X ar fi infinită. Pe de altă parte, pentru orice $x\leq 0$ avem $x+|x|=0$, deci, dacă X este nevidă, atunci $0\in X$. Reciproc, orice mulțime finită de numere reale nepozitive care îl conține pe 0 verifică proprietatea. Obținem așadar că soluțiile problemei sunt mulțimile finite cu cel mai mare element egal cu 0. □

13. Arătați că, dacă $|x-y|\leq z$, $\forall z>0$, atunci $x=y$.

Mihai Piticari, OL Suceava 1984

Soluție. Presupunem $x\neq y$, deci $|x-y|\neq 0$; luăm $z=\dfrac{|x-y|}{2}>0$ și ajungem la $1\leq\dfrac{1}{2}$, fals. □

14. Arătați că, dacă numerele $a,b,x,y\in\mathbb{R}$, cu $(x,y)\neq(0,0)$, satisfac inegalitatea $|ax+by|\leq xy$, atunci $|ax+by|\geq 4ab$.

Eugen Păltănea, OL Brașov 1988

Soluție. Dacă $ab \leq 0$, concluzia este evidentă. Fie $ab > 0$. Dacă am avea $ax + by = 0$, atunci $ax = -by$, cu a, b de același semn, deci x și y ar fi de semne opuse sau nule; cum $xy \geq |ax + by| \geq 0$, ar rezulta $xy = 0$, apoi $x = y = 0$, contradicție. Așadar $|ax + by| > 0$. Din $(ax - by)^2 \geq 0$ obținem $(ax + by)^2 \geq 4abxy$, iar înmulțind inegalitatea din ipoteză cu $4ab > 0$ obținem $4abxy \geq 4ab|ax + by|$. Rezultă $|ax + by|^2 \geq 4ab|ax + by|$ și, împărțind prin $|ax + by| > 0$, $|ax + by| \geq 4ab$. □

15. Fie mulțimea $A_p = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - p| + |x + 1| = 4\}$, unde $p \in \mathbb{R}$.

i) Determinați valorile parametrului p pentru care A_p este infinită și determinați A_p.
ii) Determinați p pentru care A_p are un singur element.

OL Arad 2002

Soluție. $4 = |x - p| + |x + 1| \geq |x - p - x - 1| = |p + 1|$. Dacă $p \in \mathbb{R} \setminus [-5, 3]$, avem $A_p = \varnothing$; dacă $p \in \{-5, 3\}$, A_p este infinită: $A_{-5} = [-5, -1]$, $A_3 = [-1, 3]$. Dacă $p \in (-5, 3)$, s-ar putea ca A_p să aibă un singur element, dar pentru $p \in (-5, -1)$ avem $A_p = \left\{\frac{p-5}{2}, \frac{p+3}{2}\right\}$, pentru $p \in (-1, 3)$ avem aceeași mulțime A_p, iar $A_{-1} = \{-3, 1\}$; așadar A_p nu are un singur element în niciun caz. □

16. Pe un cerc se scriu 2003 numere cu proprietatea că modulul diferenței oricăror două numere vecine este constant. Arătați că toate numerele sunt egale.

Dinu Șerbănescu

Soluție. Dacă $a_1, a_2, \ldots, a_{2003}$ sunt numerele date, notăm $c = |a_{i+1} - a_i|$, $i = \overline{1, 2003}$, cu convenția $a_{2004} = a_1$. Avem evident $a_{i+1} - a_i = \pm c$, $\forall i = \overline{1, 2003}$, și astfel

$$(a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + \ldots + (a_{2002} - a_{2003}) + (a_{2003} - a_1) = 0,$$

de unde

$$\underbrace{\pm c \pm c \pm \ldots \pm c}_{\text{2003 termeni}} = c\,\underbrace{(\pm 1 \pm 1 \pm \ldots \pm 1)}_{\text{2003 termeni}} = 0.$$

Deoarece $\pm 1 \pm 1 \pm \ldots \pm 1$ (2003 termeni) este un număr impar, deci nenul, deducem $c = 0$ și deci $a_1 = a_2 = \ldots = a_{2003}$. □

17. Determinați perechile (a, b) de numere reale pentru care egalitatea

$$|ax + by| + |bx + ay| = 2 \cdot (|x| + |y|)$$

este adevărată pentru orice numere reale x și y.

Lucian Dragomir, OJM 2013

Soluție. • Pentru $x = 1$, $y = -1$ obținem $|a - b| = 2$.

• Dacă $a \geq b$, se ajunge la $a = b + 2$ și astfel, pentru $x = 1$, $y = 1$, avem $|a + b| = 2|b + 1| = 2$, de unde $b \in \{-2, 0\}$, așadar $a = 0, b = -2$ sau $a = 2, b = 0$. În fiecare dintre aceste cazuri se verifică imediat că egalitatea din enunț este adevărată pentru orice numere reale x și y.

• Datorită simetriei relației, obținem $(a, b) \in \{(0, -2), (2, 0), (-2, 0), (0, 2)\}$. □

III. Probleme propuse

1. Pentru fiecare $m \in \mathbb{N}$ se notează $A_m = \{x \in \mathbb{Z} \mid |2x-1| + |3x-1| = m\}$. Arătați că: a) pentru orice $m \in \mathbb{N}$, A_m are cel mult un element; b) pentru orice $n \in \mathbb{Z}$, există $m \in \mathbb{N}$ astfel încât $n \in A_m$.

Lucian Dragomir

2. Fie $a, b \in \mathbb{R}$ și $x \in \mathbb{R}$ care verifică inegalitățile $|a+b+x| \leq 1$, $|4a+b+2x| \leq 1$ și $|9a+4b+6x| \leq 1$. Să se arate că $|x| \leq 15$.

OL Bihor 2009

3. Arătați că nu există numere reale x pentru care $|2x-1| + |3x-2| + |4x| = x-1$.

Lucian Dragomir

4. Demonstrați că, pentru orice $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, este adevărată inegalitatea

$$\max(a+c, b+d) \leq \max(a,b) + \max(c,d).$$

GM 2008

5. Numerele reale a, b, c, d, e satisfac egalitățile $|a-b| = 2|b-c| = 3|c-d| = 4|d-e| = 5|e-a|$. Arătați că numerele a, b, c, d, e sunt egale.

Cristian Mangra, OJ 2009

6. Numerele naturale a și b satisfac relația $(a^2 - 9b^2)^2 - 33b = 16$. Arătați că $|a-3b| \geq 1$.

Dan Nedeianu, OJ 2009

7. Să se determine aria mulțimii $\mathcal{D}$ de puncte din plan definită astfel:

$$\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid |x| + |y| + |x-y| \leq 2\}.$$

Maria Pop, concursul „Grigore Moisil” 2008

8. Dacă $a, b \in \mathbb{R}$, demonstrați că $|1+ab| + |a+b| \geq \sqrt{|a^2-1| \cdot |b^2-1|}$.

Dan Nedeianu, OL Mehedinți 2009

9. Numerele întregi se colorează în n culori astfel încât, dacă $x, y \in \mathbb{Z}$ și $|x-y| \in \{2, 3, 5\}$, atunci x și y au culori diferite. Să se arate că $n \geq 4$.

Ioan Tomescu, baraj OIM 2002

IV. Soluții

1. a) Considerând cele trei cazuri care apar, se obține imediat că ecuația din A_m are, pentru orice $m \in \mathbb{N}^*$, soluțiile posibile $x_1 = \dfrac{2-m}{5}$ și $x_2 = \dfrac{2+m}{5}$. Nu există $m \in \mathbb{N}^*$ pentru care aceste soluții să fie simultan numere întregi: într-adevăr, dacă ar exista $k = \dfrac{2-m}{5} \in \mathbb{Z}$ și $p = \dfrac{2+m}{5} \in \mathbb{Z}$, am ajunge la $4 = 5(k+p)$, absurd. Concluzia se impune.

b) Se obține imediat că, pentru $m = 5n+2$, $n \in \mathbb{N}$, avem $A_m = \{-n\}$, iar pentru $m = 5n+3$, $n \in \mathbb{N}$, avem $A_m = \{n+1\}$; din nou, concluzia este evidentă. □

2. Notăm $9a+4b+6x = u$, $4a+b+2x = v$ și $a+b+x = w$; căutăm acum $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ pentru care $\alpha u + \beta v + \gamma w = x$. Deducem $9\alpha+4\beta+\gamma = 0$, $4\alpha+\beta+\gamma = 0$ și $6\alpha+2\beta+\gamma = 1$, de unde ajungem imediat la $\alpha = 3$, $\beta = -5$, $\gamma = -7$ și astfel $|x| \le 3|u| + 5|v| + 7|w| \le 15$. □

3. Deoarece membrul stâng este nenegativ, se impune $x \ge 1$ (1); în aceste condiții, egalitatea devine $2x - 1 + 4x + 3x - 2 = x - 1$, adică $x = \frac{1}{4} < 1$, contradicție cu (1). □

4. Folosim **P12** și **P7** și avem

$$\max(a+c, b+d) = \frac{a+b+c+d+|a+c-b-d|}{2} \le \frac{a+b+c+d+|a-b|+|c-d|}{2}$$
$$= \frac{a+b+|a-b|}{2} + \frac{c+d+|c-d|}{2} = \max(a,b) + \max(c,d).$$ □

5. Dacă notăm $|a-b| = k$, atunci $a - b = \pm k$, $b - c = \pm\frac{1}{2}k$, $c - d = \pm\frac{1}{3}k$, $d - e = \pm\frac{1}{4}k$, $e - a = \pm\frac{1}{5}k$ (pentru anumite alegeri ale semnelor). Dacă $k = 0$, atunci $a = b = c = d = e$ și problema este rezolvată; dacă $k \neq 0$, prin adunarea relațiilor obținem

$$0 = \left(\pm 1 \pm \frac{1}{2} \pm \frac{1}{3} \pm \frac{1}{4} \pm \frac{1}{5}\right) \cdot k \Rightarrow \frac{1}{5} = \pm 1 \pm \frac{1}{2} \pm \frac{1}{3} \pm \frac{1}{4}.$$

Pentru orice alegere a semnelor, ultima egalitate este de forma $\frac{1}{5} = \frac{m}{12}$, $m \in \mathbb{Z}$, adică $12 = 5m$, deci 5 divide 12, fals. □

6. Dacă $|a-3b| = 0$, atunci $a = 3b$ și $(a^2 - 9b^2)^2 - 33b = -33b \neq 16$. Concluzia este imediată. □

7. Observăm că, dacă $(x, y) \in \mathcal{D}$, atunci $(-x, -y) \in \mathcal{D}$, așadar $\mathcal{D}$ este o mulțime simetrică față de origine și este suficient să studiem cazul $x \ge 0$.

• Dacă $y \le 0$, ajungem la $2(x-y) \le 2 \Rightarrow y \ge x - 1$. Notăm $A(0,-1)$, $B(1,0)$ și astfel, în acest caz, avem $\triangle AOB$, care are aria egală cu $\frac{1}{2}$.

• Dacă $x > y > 0$, se obține $x \le 1$; notând $C(1,1)$, obținem triunghiul BOC, a cărui arie este egală cu $\frac{1}{2}$.

• Dacă $y \ge x > 0$, se ajunge la $y \le 1$. Cu notația $E(0,1)$, avem $\mathcal{A}(EOC) = \frac{1}{2}$.

Așadar, aria părții din $\mathcal{D}$ cu $x \ge 0$ este $\frac{3}{2}$ și deci aria mulțimii $\mathcal{D}$ este 3. □

8. Folosind inegalitatea modulului, avem $|1+ab|+|a+b| \ge |1+ab+a+b|$ și $|1+ab|+|a+b| \ge |1+ab-(a+b)|$. Prin înmulțirea acestor două inegalități ajungem la

$$\big(|1+ab| + |a+b|\big)^2 \ge \big|(1+ab)^2 - (a+b)^2\big| = |a^2-1| \cdot |b^2-1|,$$

de unde inegalitatea propusă este imediată. □

9. Presupunem, prin reducere la absurd, că $n \leq 3$. Considerăm numerele $0, 2, 3, 5$; deoarece $|0-2|, |0-3|, |0-5| \in \{2, 3, 5\}$, deducem că numerele 2, 3, 5 au altă culoare decât 0. La fel, deoarece $|5-2|, |5-3| \in \{2, 3, 5\}$, rezultă că 2 și 3 au altă culoare decât 5; așadar $n = 3$, iar numerele 2 și 3 au aceeași culoare. Repetând raționamentul pentru numerele $1, 3, 4, 6$, obținem că 3 și 4 au aceeași culoare, de unde 2 și 4 au aceeași culoare. Cum însă $|2-4| \in \{2, 3, 5\}$, 2 și 4 au culori diferite, contradicție. □