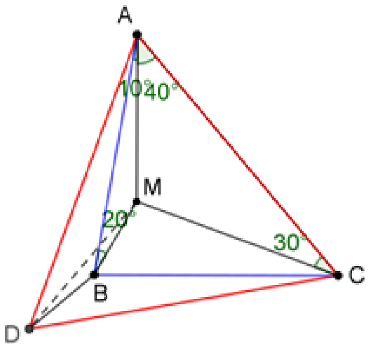
**Problema 4.** Se consideră triunghiul $ABC$ şi un punct $M$ în interiorul triunghiului astfel încât $\sphericalangle MAB = 10°$, $\sphericalangle MAC = 40°$, $\sphericalangle MCA = 30°$ şi $\sphericalangle MBA = 20°$. Arătaţi că triunghiul $ABC$ este isoscel.

*USAMO 1996*

Soluţie




Considerăm triunghiul echilateral $ACD$ cu $D$ şi $B$ de aceaşi parte a dreptei $AC$.

$\sphericalangle MCD = \sphericalangle ACD - \sphericalangle ACM = 60° - 20° = 40°$.

Din congruenţa triunghiurilor $CMA$ şi $CMD$ $(L.U.L)$ rezultă $\sphericalangle MDC = \sphericalangle MAC = 40°$ şi astfel

$\sphericalangle MDA = \sphericalangle CDA - \sphericalangle CDM = 60° - 40° = 20°$.

În triunghiul $ABM$ avem $\sphericalangle MAB = 10°$, $\sphericalangle MBA = 20°$, astfel că $\sphericalangle AMB = 150°$.

Deoarece $\sphericalangle ADM = \sphericalangle ABM = 20°$ rezultă patrulaterul $ADBM$ este inscriptibil cu $\sphericalangle ADB = 180° - \sphericalangle AMB = 180° - 150° = 30°$.

$\sphericalangle CDB = \sphericalangle CDA - \sphericalangle BDA = 60° - 30° = 30°$.

Triunghiurile $DBC$ şi $DBA$ sunt congruente $(L.U.L)$ de unde rezultă $BC = BA$.

PS pentru mai multe soluţii a se vedea $AOPS$ online