Problema 2. Fie a, b, c numere reale pozitive astfel încât $abc = 1$. Demonstraţi că

$$(1+a^4)(1+b^4)(1+c^4) \geq (1+a)(1+b)(1+c).$$

Soluţia 1:
Pentru orice $x, y > 0$ avem

$$(1+x^2)(1+y^2) \geq (1+xy)^2 \qquad (1)$$

(din inegalitatea Cauchy-Buniakowsky-Schwarz sau observând că inegalitatea revine după efectuarea calculelor la inegalitatea evidentă $x^2+y^2 \geq 2xy$, satisfăcută cu egalitate dacă $x = y$).

Folsind (1) pentru $x = a^2$ şi $y = b^2$ obţinem $(1+a^4)(1+b^4) \geq (1+a^2b^2)^2$, cu egalitate dacă $a = b$. Analog se obţin relaţiile $(1+b^4)(1+c^4) \geq (1+b^2c^2)^2$ şi $(1+c^4)(1+a^4) \geq (1+c^2a^2)^2$. Înmulţind aceste trei relaţii obţinem

$$[(1+a^4)(1+b^4)(1+c^4)]^2 \geq [(1+a^2b^2)(1+b^2c^2)(1+c^2a^2)]^2. \qquad (2)$$

Folosind acum (1) pentru $x = ab$, $y = bc$ şi condiţia $abc = 1$ obţinem

$$(1+a^2b^2)(1+b^2c^2) \geq (1+ab\cdot bc)^2 = (1+b)^2.$$

Analog se obţin inegalităţile $(1+b^2c^2)(1+c^2a^2) \geq (1+c)^2$ şi $(1+c^2a^2)(1+a^2b^2) \geq (1+a)^2$. Înmulţind aceste inegalităţi obţinem

$$[(1+a^2b^2)(1+b^2c^2)(1+c^2a^2)]^2 \geq [(1+a)(1+b)(1+c)]^2, \qquad (3)$$

care combinat cu (2) conduce la

$$[(1+a^4)(1+b^4)(1+c^4)]^2 \geq [(1+a)(1+b)(1+c)]^2,$$

de unde rezultă inegalitatea din enunţ.
Egalitatea are loc dacă şi numai dacă $a = b = c = 1$.

Soluţia 2:
Desfacem parantezele, folosim că $abc = 1$ şi reducem termenii asemenea. Ajungem la $a^4+b^4+c^4+(ab)^4+(bc)^4+(ca)^4 \geq a+b+c+ab+bc+ca$. Dar folosind inegalitatea cunoscută $x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+zx$ mai întâi pentru $x = A^2$, $y = B^2$, $z = C^2$, apoi pentru $x = AB$, $y = BC$, $z = CA$ obţinem $A^4+B^4+C^4 \geq$

$$(AB)^2+(BC)^2+(CA)^2 \geq AB\cdot BC+BC\cdot CA+CA\cdot AB = ABC(A+B+C).$$

Folosind această relaţie pentru $A = a$, $B = b$, $C = c$ şi apoi pentru $A = ab$, $B = bc$, $C = ca$, obţinem $a^4+b^4+c^4 \geq abc(a+b+c) = a+b+c$ şi $(ab)^4+(bc)^4+(ca)^4 \geq$

$(abc)^2(ab+bc+ca) = ab+bc+ca$ care adunate conduc la inegalitatea din enunţ. Egalitatea are loc dacă şi numai dacă $a = b = c = 1$.

În încheiere vă propunem şi următoareageneralizare: arătaţi că dacă $n \in \mathbb{N}$ şi a, b, c sunt numere reale pozitive astfel încât $abc = 1$, atunci

$$(1+a^{n+1})(1+b^{n+1})(1+c^{n+1}) \geq (1+a^n)(1+b^n)(1+c^n).$$