Problema 4. În căsuţele unui pătrat 10×10 se scriu numerele $1, 2, 3, \ldots, 100$ astfel încât oricare două numere consecutive să se afle în căsuţe vecine.[1] Demonstraţi că există o linie sau o coloană care conţine cel puţin două pătrate perfecte.

Adrian Zahariuc

Soluţie:
Presupunem că am putea scrie numerele de la 1 la 100 în căsuţele pătratului 10×10 respectând condiţia ca numere consecutive să se afle în căsuţe vecine fără însă ca două pătrate perfecte să se afle pe o aceeaşi linie sau coloană.
Printre numerele de la 1 la 100 avem 10 pătrate perfecte, deci trebuie să avem exact un pătrat perfect pe fiecare linie şi pe fiecare coloană.
Numerotăm liniile şi coloanele tablei, de sus în jos, respectiv de la stânga la dreapta, cu $1, 2, \ldots, 10$.
Ne uităm acum la suma dintre numărul liniei şi numărul coloanei ocupate de un pătrat perfect. Dacă facem suma acestor sume obţinem, pe de-o parte,

$$(1 + 2 + 3 + \ldots + 10) + (1 + 2 + 3 + \ldots 10) = 110.$$

Pe de altă parte, dacă am colora căsuţele tablei cu alb sau cu negru, asemeni unei table de şah (oricare două căsuţe vecine au culori diferite), observăm că toate numerele pare se află pe pătrăţele de o aceeaşi culoare, în vreme ce numerele impare se află pe pătrăţele de culoarea opusă. Atunci 5 dintre pătratele perfecte se vor afla în căsuţe albe, iar celelalte 5 în căsuţe negre. Dar făcând suma dintre numărul liniei şi numărul coloanei pentru o căsuţă albă, respectiv neagră, observăm că paritatea sumei obţinute depinde numai de culoarea căsuţei. Atunci făcând suma dintre numărul liniei şi numărul coloanei pentru fiecare din cele 10 căsuţe ocupate de un pătrat perfect, obţinem 5 sume pare şi 5 impare, prin urmare suma acestor 10 sume va fi un număr impar.
În concluzie, presupunerea făcută ne-a condus la concluzia că respectiva sumă este, pe de-o parte 110, pe de altă parte un număr impar, adică la o contradicţie.
Aşadar trebuie să existe o linie sau o coloană pe care să se afle două pătrate perfecte.

În încheiere vă propunem o problemă oarecum similară, dată la Turneul Oraşelor în 2001:

Un pătrat 15×15 este împărţit în pătrăţele unitate. În 15 dintre acestea se află turnuri care nu se atacă unul pe celălalt. Apoi, fiecare turn face o mutare ca aceea a unui cal. Demonstraţi că în noua poziţie există două turnuri care se atacă.

[1] Două căsuţe sunt vecine dacă au o latură comună.