

P2. a) Fie p un număr prim, iar $a \in \mathbb{Z} \setminus p\mathbb{Z}$ un întreg nemultiplu de p . Arătați că funcția

$$\mu_a : \{1, 2, \dots, p-1\} \longrightarrow \{1, 2, \dots, p-1\}, \quad \mu_a(k) = \text{restul împărțirii lui } ak \text{ prin } p$$

este o permutare a mulțimii $\{1, 2, \dots, p-1\}$.

b) Pentru $p = 7$ determinați toate permutările $\sigma \in S_6$ cu proprietatea că $\sigma\mu_2 = \mu_4\sigma$.

S. a) Pentru orice $k \in \{1, 2, \dots, p-1\}$, deoarece $p \nmid a$ și $p \nmid k$, rezultă că $p \nmid ak$. Funcția μ_a este deci corect definită. Pentru orice $i, j \in \{1, 2, \dots, p-1\}$ cu $i < j$, deoarece $p \nmid (j-i)$, rezultă că $p \nmid a(j-i)$, de unde $p \nmid (\mu_a(j) - \mu_a(i))$, astfel că $\mu_a(i) \neq \mu_a(j)$. Rezultă că funcția μ_a este injectivă, și cum $\{1, 2, \dots, p-1\}$ este finită, μ_a este bijectivă, deci o permutare a mulțimii $\{1, 2, \dots, p-1\}$.

b) În notație cíclică avem că $\mu_2 = (1, 2, 4)(3, 6, 5)$, iar $\mu_4 (= \mu_2^{-1}) = (1, 4, 2)(3, 5, 6)$. Ținând cont de identitatea $\sigma(i_1, i_2, \dots, i_l)\sigma^{-1} = (\sigma(i_1), \sigma(i_2), \dots, \sigma(i_l))$, condiția din enunț se transcrie echivalent:

$$\begin{aligned} \sigma\mu_2 = \mu_4\sigma &\iff \sigma\mu_2\sigma^{-1} = \mu_4 \iff (\sigma(1), \sigma(2), \sigma(4))(\sigma(3), \sigma(6), \sigma(5)) = (1, 4, 2)(3, 5, 6) \iff \\ \iff \begin{cases} (\sigma(1), \sigma(2), \sigma(4)) &= (1, 4, 2) \\ (\sigma(3), \sigma(6), \sigma(5)) &= (3, 5, 6) \end{cases} \quad (1), \quad \text{sau} \quad \begin{cases} (\sigma(1), \sigma(2), \sigma(4)) &= (3, 5, 6) \\ (\sigma(3), \sigma(6), \sigma(5)) &= (1, 4, 2) \end{cases} \quad (2). \end{aligned}$$

Mulțimea permutărilor care verifică condiția (1) de mai sus este

$$A = \{(2, 4)(5, 6), (2, 4)(3, 5), (2, 4)(3, 6), (1, 4)(5, 6), (1, 4)(3, 5), (1, 4)(3, 6), (1, 2)(5, 6), (1, 2)(3, 5), (1, 2)(3, 6)\}.$$

Mulțimea permutărilor care verifică condiția (2) este

$$B = \{(1, 3)(2, 5)(4, 6), (1, 3, 4, 6, 2, 5), (1, 3, 2, 5, 4, 6), (1, 5, 2, 6, 4, 3), (1, 5)(2, 6)(3, 4), (1, 5, 4, 3, 2, 6), (1, 6, 4, 5, 2, 3), (1, 6, 2, 3, 4, 5), (1, 6)(2, 3)(4, 5)\}.$$

Avem astfel că $\{\sigma \in S_6 \mid \sigma\mu_2 = \mu_4\sigma\} = A \cup B$.