Teoreme şi probleme ce caracterizează rangul unei matrice

Vasile Pop

Noţiunea de rang al unei matrice este o noţiune primară în algebra liniară, motiv pentru care de mulţi ani ea este tratată superficial şi este considerată o noţiune elementară, simplă, care nu poate face probleme. Am considerat necesară apariţia acestei note pentru a repune la poziţia cuvenită atenţia pentru această noţiune, de fapt esenţială în algebra liniară.

1 Definiţii şi teoreme referitoare la rangul unei matrice

Fie $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ o matrice, unde m şi n sunt numere naturale nenule, în general $m \geq 2$ şi $n \geq 2$.

Definim următoarele numere naturale:

$k_1 =$ ordinul maxim al unui minor nenul din matricea A

$k_2 =$ numărul coloanelor liniar independente din matricea A

$k_3 =$ numărul liniilor liniar independente din matricea A

$k_4 = n - def\ A$, unde defectul lui A este $def\ A =$ numărul parametrilor din soluţia sistemului omogen $A \cdot X = 0, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$, (numărul necunoscutelor secundare),

$k_5 =$ dimensiunea imaginii aplicaţiei liniare $T_A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$,

$$T_A(X) = A \cdot X,$$

unde $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^n$.

Teorema 1.1. *Pentru orice matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ numerele naturale k_1, k_2, k_3, k_4, k_5 sunt egale.*

Demonstraţie. a) Dacă notăm cu $E_1, E_2, \ldots, E_n$ baza canonică a spaţiului $\mathbb{C}^n$ (coloanele matricei unitate I_n) şi cu $C_1, C_2, \ldots, C_n$ coloanele matricei A, atunci $C_1 = T_A(E_1)$, $C_2 = T_A(E_2), \ldots$, $C_n = T_A(E_n)$, deci imaginea aplicaţiei T_A este subspaţiul generat de vectorii $C_1, C_2, \ldots, C_n$. În concluzie $k_5 = k_2$.

b) Din definiţia lui k_2, oricare k_2+1 coloane ale matricei A sunt liniar dependente, deci în orice determinant de ordin k_2+1, o coloană este combinaţie liniară de altele, astfel că orice determinant de ordin k_2+1 este nul. În concluzie, $k_1 \leq k_2$.

c) Dacă în matricea A există $k = k_2$ coloane liniar independente, fie ele $C_1, C_2, \ldots, C_k$ arătăm că putem găsi un minor nenul de ordin k format din elemente de pe aceste coloane. Din independenţă rezultă că singurul k-uplu $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ care verifică relaţia $x_1C_1 + x_2C_2 + \cdots + x_kC_k = 0$ este $(0, 0, \ldots, 0)$. Relaţia de mai sus se poate scrie ca un sistem de n ecuaţii cu k necunoscute, omogen:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1k}x_k = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2k}x_k = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{kk}x_k = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nk}x_k = 0 \end{cases}$$

Considerăm liniile $L'_1 = [a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1k}]$, $L'_2 = [a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2k}], \ldots$, $L'_n = [a_{n1}, a_{n2}, \ldots, a_{nk}]$, din care putem extrage maxim k linii liniar independente de celelalte $n-k$, care se pot exprima prin combinaţii liniare ale primelor. Aceasta revine la faptul că în sistemul dat $n-k$ dintre ecuaţii sunt consecinţe ale celorlalte k ecuaţii, deci sistemul se poate reduce la k ecuaţii, k necunoscute, omogen. Pentru ca unica lui soluţie să fie soluţia banală $(0, 0, \ldots, 0)$ este necesar şi suficient ca determinantul său să fie nenul. Din acest raţionament rezultă $k_2 \leq k_1$.

d) Din a), b), c) rezultă $k_1 = k_2 = k_5$.

Este evident că dacă în matricea A avem un minor nenul atunci şi în matricea A^t minorul corespunzător este nenul, în concluzie k_1 este egal cu numărul coloanelor independente din A^t, adică egal cu numărul liniilor independente din A, deci $k_1 = k_3$.

e) Dacă în A ordinul maxim al unui minor nenul este k_1 şi alegem un astfel de minor, atunci sistemul omogen $A \cdot X = 0$, cu necunoscutele $x_1, x_2, \ldots, x_n$ se reduce la un sistem de k_1 ecuaţii cu n necunoscute (ecuaţiile corespunzătoare liniilor minorului). Rămân $n - k_1$ necunoscute secundare (parametri), în funcţie de care se dă soluţia generală. Astfel $k_1 = k_4$. $\square$

Definiţia 1.2. Pentru o matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, numărul $k = k_1 = k_2 = k_3 = k_4$, $k \leq \min\{m, n\}$, definit în Teorema 1.1, se numeşte rangul matricei A.

Definiţia 1.3. *Pentru rangul matricei* $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ *avem următoarele definiţii* *echivalente:*

D1. Rangul matricei A este ordinul maxim al unui minor nenul, din matricea A.

D2. Rangul matricei A este numărul maxim de coloane liniar independente din matricea A.

D3. Rangul matricei A este numărul maxim de linii liniar independente din matricea A.

D4. Rangul matricei A este dimensiunea imaginii aplicaţie liniară $T_A(X) = A{\cdot}X$, $T_A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$.

Un rol foarte important în determinarea rangului unei matrice îl au transformările care nu schimbă rangul, numite transformări elementare.

Definiţia 1.4. Fie $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ o matrice.

Se numeşte transformare elementară de linii urmăroarele transformări:

- schimbarea între ele a două linii
- înmulţirea unei linii cu un număr nenul
- adunarea unei linii la altă linie.

Analog se definesc şi matricele elementare de coloane.

Definiţia 1.5. Se numeşte matrice elementară de ordin k o matrice obţinută dintr-o matrice unitate I_k prin efectuarea unei transformări elementare.

Dăm în continuare fără demonstraţie câteva teoreme de bază care pot fi găsite în [1].

Teorema 1.6. • *Efectuarea unei transformări elementare pe liniile matricei $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ revine la înmulţirea matricei A la stânga cu matricea elementară $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, corespunzătoare transformării.*

• *Efectuarea unei transformări elementare pe coloanele matricei $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ revine la înmulţirea matricei A la dreapta cu matricea elementară $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ corespunzătoare transformării.*

Observaţia 1.7. • Orice matrice elementară este o matrice inversabilă.

• Prin efectuarea într-o matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ a unei transformări elementare, rangul matricei nu se schimbă.

Teorema 1.8. *Orice matrice inversabilă se poate scrie ca un produs de matrice elementare.*

Teorema 1.9. *Prin înmulţirea unei matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, la stânga sau la dreapta, cu o matrice inversabilă, rangul matricei nu se schimbă.*

Observaţia 1.10. a) În general, prin înmulţirea unei matrice la stânga sau la dreapta cu altă matrice, rangul nu creşte
$(rang A \cdot B \leq \min\{rang A, rang B\})$.

b) Dacă A este matrice pătratică şi E este o matrice elementară atunci

$\det(A\cdot E) = \det(E\cdot A) = \det(A)\det(E)$, proprietate folosită în demonstraţia: $\det(A\cdot B) = \det(A)\det(B)$.

c) Cu transformări elementare se poate lucra şi în matrice cu blocuri:

- schimbarea între ele a două benzi orizontale sau verticale.
- înmulţirea unei benzi orizontale la stânga cu o matrice pătratică inversabilă.
- înmulţirea unei benzi verticale la dreapta cu o matrice pătratică inversabilă.
- adunarea la o bandă orizontală a unei alte benzi orizontale înmulţită la stânga cu o matrice pătratică,
- adunarea la o bandă verticală a unei alte benzi verticale înmulţită la dreapta cu o matrice pătratică.

Definiţia 1.11. Spunem că două matrice $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ sunt echivalente şi notăm $A \equiv B$, dacă există două matrice inversabile $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ şi $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ astfel ca $B = P\cdot A\cdot Q$.

Cea mai importantă teoremă legată de rangul unei matrice este:

Teorema 1.12. *Dacă $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ atunci există succesiunea de transformări elementare, pe liniile şi coloanele matricei A, care transformă matricea A într-o matrice de forma*

$$A' = \left[\begin{array}{c|c} I_k & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]$$

şi atunci $rangA = rangA' = k$.

Teorema 1.13. *Matricele $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ sunt matrice echivalente dacă şi numai dacă ele au acelaşi rang.*

2 Probleme ce caracterizează rangul unei matrice

Problema 1. *Fie $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ o matrice de rang $k \le \min\{m, n\}$. Să se arate că există două matrice $B \in \mathcal{M}_{n,k}(\mathbb{C})$ şi $C \in \mathcal{M}_{k,m}(\mathbb{C})$ astfel ca $A = B\cdot C$.*

Soluţie. Dacă $rangA = k$ atunci

$$A \equiv \left[\begin{array}{c|c} I_k & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right],$$

deci există matricele inversabile $P \in \mathcal{M}_m(\mathbb{C})$ şi $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ astfel ca

$$A = P\cdot \left[\begin{array}{c|c} I_k & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right] \cdot Q.$$

Este uşor de verificat egalitatea

$$\left[\begin{array}{c} I_k \\ \hline 0 \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c|c} I_k & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} I_k & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]$$

şi atunci

$$A = P \cdot \left[\begin{array}{c} I_k \\ \hline 0 \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c|c} I_k & 0 \end{array}\right] \cdot Q.$$

Notăm

$$B = P \cdot \left[\begin{array}{c} I_k \\ \hline 0 \end{array}\right] \quad \text{şi} \quad C = \left[\begin{array}{c|c} I_k & 0 \end{array}\right] \cdot Q.$$

Problema 2. *Fie $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ o matrice de rang $k \leq \min\{m, n\}$. Să se arate că există matricele coloane $C_1, C_2, \ldots, C_k$ şi matricele linie $L_1, L_2, \ldots, L_k$ astfel ca*

$$A = C_1 \cdot L_1 + C_2 \cdot L_2 + \cdots + C_k \cdot L_k.$$

Soluţie. Ca în problema precedentă, scriem matricea $\left[\begin{array}{c|c} I_k & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]$ sub forma $C_1' \cdot L_1' + C_2' \cdot L_2' + \cdots + C_k' \cdot L_k'$ unde $C_1', C_2', \ldots, C_k'$ sunt primele k coloane ale matricei unitate I_m şi $L_1', L_2', \ldots, L_k'$ sunt primele k linii ale matricei unitate I_n. Definim $C_1 = P \cdot C_1'$, $C_2 = P \cdot C_2', \ldots$, $C_k = P \cdot C_k'$ şi $L_1 = L_1' \cdot Q$, $L_2 = L_2' \cdot Q, \ldots$, $L_k = L_k' \cdot Q$.

Problema 3. *Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ două matrice cu proprietatea $rangA + rangB \leq n$. Să se arate că există o matrice inversabilă $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ astfel ca $A \cdot X \cdot B = 0$.*

Olimpiada Judeţeană 2008

Soluţie. Conform Teoremei 1.12 există matricele inversabile P_1, Q_1, P_2, Q_2 astfel ca

$$A = P_1 \cdot \left[\begin{array}{c|c} I_k & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right] \cdot Q_1 \quad \text{şi} \quad B = P_2 \cdot \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & I_m \end{array}\right] \cdot Q_2,$$

unde $k = rangA$ şi $m = rangB$, $k_m \leq n$. Avem:

$$A \cdot X \cdot B = P_1 \cdot \left[\begin{array}{c|c} I_k & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right] \cdot Q_1 \cdot X \cdot P_2 \cdot \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & I_m \end{array}\right] \cdot Q_2.$$

Dacă luăm $X = Q_1^{-1} \cdot P_1^{-1}$ obţinem

$$A \cdot X \cdot B = \left[\begin{array}{c|c} I_k & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & I_m \end{array}\right] = 0.$$

Problema 4. *Să se arate că singura funcţie surjectivă* $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \{0, 1, 2, \ldots, n\}$ *care verifică inegalitatea:*

$$f(X \cdot Y) \leq \min\{f(X), f(Y)\},\ \forall\ X, Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$$

este funcţia $f(X) = rangX,\ \forall\ X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. (SEEMOUS 2008)

Soluţie. Avem:

$$f(X \cdot I_n) \leq \min\{f(X), f(I_n)\}\ \Leftrightarrow$$

(1) • $f(X) \leq \min\{f(X), f(I_n)\}\ \Leftrightarrow\ f(X) \leq f(I_n),\ \forall\ X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
(2) • $f(I_n) = f(X \cdot X^{-1}) \leq \min\{f(X), f(X^{-1})\} \leq f(X)$,
pentru orice matrice inversabilă $X \in GL_n(\mathbb{R})$
(3) • Din (1) şi (2) rezultă $f(X) = f(I_n),\ \forall\ X \in GL_n(\mathbb{R})$.
(4) • Dacă $X \in GL_n(\mathbb{R})$ şi $Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ atunci

$$f(X \cdot Y) \leq f(Y) \quad \text{şi} \quad f(Y) = f(X^{-1} \cdot X \cdot Y) \leq f(X \cdot Y),$$

deci $f(X \cdot Y) = f(Y)$ şi analog $f(Y \cdot X) = f(Y),\ \forall\ Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \forall\ X \in GL_n(\mathbb{R})$.

Se ştie că orice matrice $Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang k poate fi adusă prin transformări elementare pe linii şi coloane la matricea $J_k = \left[\begin{array}{c|c} I_k & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]$, deci există matricele X şi Z din $GL_n(\mathbb{R})$ astfel ca $Y = X \cdot J_k \cdot Z$. Din (4) rezultă $f(Y) = f(J_k)$. Este suficient să definim funcţia f pe matricele J_k, $k = \overline{0, n}$. Din $J_k \cdot J_{k+1} = J_k$ rezultă $f(J_k) \leq f(J_{k+1})$ şi folosind surjectivitatea funcţiei f rezultă $f(J_0) = 0$, $f(J_1) = 1, \ldots, f(J_n) = n$. Deci $f(Y) = rangY$, $\forall\ Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Bibliografie

[1] V. Pop, *Algebră liniară*, Ed. Mediamira, Cluj-Napoca, 2004.

[2] V. Pop (colectiv), *Matematică pentru grupele de performanţă. Manual pentru clasa a XI-a*, Ed. Dacia Educaţional, 2004.

[3] V. Pop, *Algebră liniară pentru elevi, studenţi şi concursuri*, Ed. Mediamira, 2007.

Vasile Pop
Universitatea Tehnică Cluj-Napoca
Str. C. Daicoviciu 15
400020, Cluj-Napoca, Romania
E-mail: vasile.pop@math.utcluj.ro