Problema 3. Fie AD înălţime în triunghiul ABC, cu $D \in [BC]$. Determinaţi măsura unghiului $\angle BAC$, ştiind că lungimile segmentelor $[AD]$, $[BD]$ şi $[CD]$ sunt direct proporţionale cu numerele 2, 3 şi respectiv 10.

Sorana Ionescu, Slobozia

Soluţie:

Din $\frac{AD}{2} = \frac{BD}{3} = \frac{CD}{10}$ obţinem $AD = 2a$, $BD = 3a$ şi $CD = 10a$, cu $a > 0$. Fie $H \in (BC)$ astfel încât $BH = 5a$ şi fie $HF \perp BC$, cu BC nu separă punctele A şi F. Avem $HF \| AD$, ambele fiind perpendiculare pe BC. Cum $HF = AD = 2a$, obţinem că $HFAD$ este paralelogram; deoarece $m(\angle DHF) = 90°$ şi $AD = DH = 2a$ rezultă că $HFAD$ este pătrat, deci $m(\angle AFH) = 90°$ şi $AF = DH = 2a$. Considerăm $E \in FH$, cu $H \in (FE)$ şi $HE = a$.

Avem $m(\angle BHE) = m(\angle CDA) = 90°$ şi $\frac{BH}{CD} = \frac{HE}{DA} = \frac{1}{2}$; prin urmare $\triangle BHE \sim \triangle CDA$, de unde $\angle HBE \equiv \angle DCA$ şi $m(\angle ABC) + m(\angle ACB) = m(\angle ABC) + m(\angle HBE) = m(\angle ABE)$.

Avem de asemenea că $\triangle BHE \equiv \triangle CDA$ (cazul $C.C.$); rezultă de aici că $AB = AE$ şi $\angle ABD \equiv \angle AEF$. Dar $\angle DAE \equiv \angle AEF$, de unde $\angle DAE \equiv \angle ABD$. Aşadar

$$m(\angle BAE) = m(\angle BAD) + m(\angle DAE) = m(\angle BAD) + m(\angle ABD) = 90°,$$

şi cum $AB = AE$, concluzionăm că triunghiul ABE este dreptunghic isoscel, de unde rezultă că $m(\angle ABE) = m(\angle ABC) + m(\angle ACB) = 45°$, şi deci $m(\angle BAC) = 135°$.