Clasa a X-a - Etapa 4 - Problema 4

Enunţ: *Fie* $a, b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ *şi funcţia* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} ax, & x \in \mathbb{Q} \\ bx, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$.

Demonstraţi că funcţia f *este bijectivă dacă şi numai dacă* $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$.

Soluţie. Pentru început să remarcăm că dacă o funcţie ă funcţie este bijectivă dacă şi numai dacă este bijectivă, atunci funcţia αu are aceeaşi proprietate, pentru orice $\alpha \in \mathbb{R}$.

Atunci fie $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{1}{a} f(x)$. Avem $g(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q} \\ \frac{b}{a} x, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$. Dacă am avea $\frac{a}{b} \notin \mathbb{Q}$, am obţine $f(1) = f\left(\frac{a}{b}\right)$, deci f nu poate fi injectivă. Dacă $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, $\operatorname{Im}\left(g|_{\mathbb{Q}}\right) = \mathbb{Q}$ şi $\operatorname{Im}\left(g|_{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}}\right) = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, deci f este surjectivă, de unde concluzia.