Determinaţi numerele reale x, y, z pentru care avem egalitatea

$$x^4(y^4+1)+y^4(z^4+1)+z^4(x^4+1)=12xyz-6.$$

Florin Stănescu

Soluţia 1.
Ecuaţia se rescrie echivalent $(x^2y^2-1)^2+(y^2z^2-1)^2+(z^2x^2-1)^2+(x^2-1)^2+(y^2-1)^2+(z^2-1)^2+2(x-yz)^2+2(y-zx)^2+2(z-xy)^2=0$.
Pentru ca această sumă de pătrate să fie egală cu 0 este necesar şi suficient ca $x^2y^2=y^2z^2=z^2x^2=x^2=y^2=z^2=1$ şi $x=yz$, $y=zx$, $z=xy$. Din primele relaţii deducem că $x, y, z \in \{-1, 1\}$, apoi din ultimele trei găsim soluţiile $(x, y, z) \in \{(1,1,1), (-1,-1,1), (-1,1,-1), (1,-1,-1)\}$.

Soluţia 2.)
Folosind inegalitatea $x^4+1 \geq 2x^2$ şi analoagele ei, avem $12xyz = 6+x^4(y^4+1)+y^4(z^4+1)+z^4(x^4+1) \geq 6+2x^4y^2+2y^4z^2+2z^4x^2 = 2(1+1+1+x^4y^2+y^4z^2+z^4x^2) \geq 12\sqrt[6]{1\cdot 1\cdot 1\cdot x^4y^2\cdot y^4z^2\cdot z^4x^2} = 12\,|\,xyz\,| \geq 12xyz$. Am folosit inegalitatea mediilor pentru 6 numere. Rezultă că avem egalitate atât în inegalitatea mediilor (deci $1=x^4y^2=y^4z^2=z^4x^2$), cât şi în $|\,xyz\,| \geq xyz$ (deci $xyz \geq 0$). Din $1=x^4y^2=y^4z^2=z^4x^2$ rezultă $x^4y^2\cdot y^4z^2\cdot z^4x^2=1$, de unde $x^2y^2z^2=1$. Combinând această relaţie cu $1=x^4y^2=y^4z^2=z^4x^2$, deducem $x^2=y^2=z^2=1$ şi, cum $xyz \geq 0$, obţinem soluţiile $(x, y, z) \in \{(1,1,1), (-1,-1,1), (-1,1,-1), (1,-1,-1)\}$.
Observaţie (*Alexandru Mihalcu*): Se poate aplica direct inegalitatea mediilor pentru 12 numere, anume x^4y^4, y^4z^4, z^4x^4, x^4, y^4, $z^4, 1, 1, 1, 1, 1, 1$.