SOLUȚIE

Problema 3

Fie z_1, z_2, z_3, z_4 numere complexe distincte două câte două, cu proprietatea că

$$|z_1| = |z_2| = |z_3| = |z_4| > 0$$

şi există $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 1$, astfel încât:

$$|az_1 + z_2 + z_3 + z_4| = |z_1 + az_2 + z_3 + z_4| = |z_1 + z_2 + az_3 + z_4|.$$

Să se arate că z_1, z_2, z_3, z_4 sunt afixele vârfurilor unui dreptunghi.

Vasile Pop

Soluţie. Notăm $z_0 = z_1 + z_2 + z_3 + z_4$ şi avem:

$$|z_0 - (1-a)z_1| = |z_0 - (1-a)z_2| = |z_0 - (1-a)z_3|$$

ceea ce arată că z_0 este egal depărtat de $(1-a)z_1$, $(1-a)z_2$, $(1-a)z_3$. Avem $|(1-a)z_1| = |(1-a)z_2| = |(1-a)z_3| = |1-a| > 0$ şi atunci centrul cercului circumscris triunghiului cu vârfurile de afixe

$$u_1 = (1-a)z_1,\ u_2 = (1-a)z_2,\ u_3 = (1-a)z_3$$

este $O = z_0$ şi de aici obţinem condiţia

$$z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 0.$$

Fie în această ordine z_1, z_2, z_3, z_4 pe cercul $|z| = |z_1| = r$. Avem:

$$z_1 + z_3 = (-z_2) + (-z_4)$$

şi atunci patrulaterul cu vârfurile $z_1, -z_2, z_3, -z_4$ este paralelogram înscris în cercul de rază r, care de fapt este un dreptunghi şi atunci diagonalele $[z_1, z_3]$ şi $[-z_2, -z_4]$ trec prin centrul cercului. Astfel că $z_1 + z_3 = 0$ şi $z_2 + z_4 = 0$, deci $z_3 = -z_1$ şi $z_4 = -z_2$, ceea ce arată că z_1, z_2, z_3, z_4 sunt vârfurile unui dreptunghi.