Problema 4
Etapa a 5-a
Clasa a VII-a

Problema 4. Determinaţi numerele naturale nenule a, b, c pentru care:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{a+b+c}{2}.$$

Soluţie. Dacă niciunul dintre numerele naturale nenule a, b, c nu este egal cu 1, atunci

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\leqslant\frac{3}{2}<3\leqslant\frac{a+b+c}{2},$$

astfel că egalitatea nu este posibilă.

Pentru $a=1$ relaţia dată devine

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{b+c}{2}.$$

Dacă $b\geqslant 2$ şi $c\geqslant 2$, atunci

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\leqslant\frac{3}{2}<2\leqslant\frac{b+c}{2}.$$

Prin urmare $b=1$ sau $c=1$.

Fără a restrânge generalitatea, datorită simetriei, putem considera $b=1$. Obţinem $1+\frac{1}{c}=\frac{c}{2}$. De aici $2c+2=c^2$, adică $c(c-2)=2$. Ultima relaţie nu are soluţii în mulţimea numerelor naturale nenule deoarece produsul $c(c-2)$ este fie impar, fie divizibil cu 4.

Aşadar nu există numerele naturale nenule a, b, c pentru care să aibă loc egalitatea din enunţ.