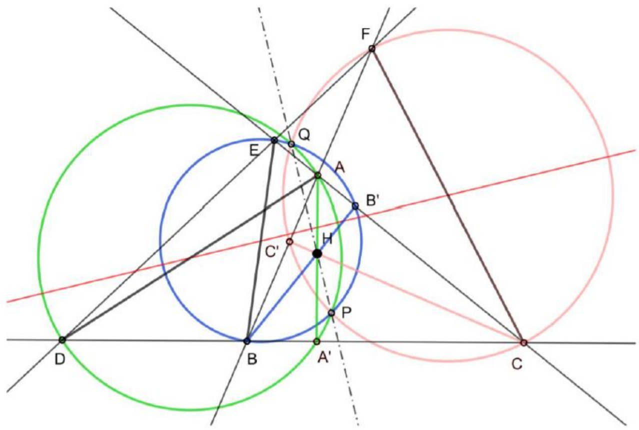
Clasa a IX-a

Problema 3. Se consideră triunghiul ABC şi punctele coliniare D, E, F situate pe dreptele BC, CA respectiv AB. Să se arate că cercurile de diametre AD, BE, CF au două puncte comune.

Petru Braica, GMB 3/2021

Soluţie.



Centrele celor trei cercuri în cauză sunt mijloacele segmentelor AD, BE respectiv CF. Aceste trei segmente sunt diagonalele patrulaterului complet $ABDEFC$, deci sunt coliniare (dreapta Newton-Gauss asociată acestui patrulater; vezi figura).

Astfel, axele radicale a câte două dintre cele trei cercuri sunt paralele sau coincid. . . . . **3 puncte**

Pe de altă parte, cercul de diametru AD trece şi prin piciorul A' al înălţimii din A a triunghiului ABC; analog pentru vârfurile B şi C.

Deoarece ortocentrul H al triunghiului ABC are proprietatea că

$$HA \cdot HA' = HB \cdot HB' = HC \cdot HC'$$

(asemănări de triunghiuri: $\Delta HA'B \sim \Delta HB'A$ şi $\Delta HA'C \sim \Delta HC'A$), rezultă că punctul H are puteri egale faţă de cele trei cercuri, deci cele trei axe radicale de mai sus trec prin H.

Astfel, cele trei axe radicale au un punct comun, deci ele coincid.

De aici rezultă imediat concluzia problemei. . . . . **4 puncte**