ETAPA 2

Numele şi prenumele: CIOCOIU Alexandru Boris
Colegiul „Național”, Iaşi

Problema 4. Un număr natural împărțit la suma cifrelor sale dă restul ultima sa cifră și câtul egal cu prima cifră a sa. Aflați numărul. Câte soluții are problema ?

Mihai Bunget, Tîrgu-Jiu

Rezolvare:

Considerăm un număr de forma : $N = \overline{a_1a_2\ldots a_n}$. Se poate scrie:

$$\overline{a_1a_2\ldots a_n} = a_1(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) + a_n \Rightarrow \overline{a_1a_2\ldots a_{n-1}0} = a_1(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) \le 81n$$

unde valoarea din membrul drept se obține atunci când toate cifrele sunt egale cu 9.

Se poate scrie:

$$10^{n-1} \le \overline{a_1a_2\ldots a_{n-1}0} \le 81n$$

Prin verificare directă se constată că această inegalitate este valabilă pentru $n \le 3$. Pentru $n \ge 4$ diferența dintre numerele 10^{n-1} și $81n$ devine strict pozitivă și crește odată cu creșterea lui n: astfel, dacă notăm $x_n = 10^{n-1} - 81n$ se poate scrie:

$$x_n = 10^{n-1} - 81n\ , \quad x_n > 0 \ \ pentru\ n \ge 4$$
$$x_{n+1} = 10^n - 81(n+1)$$
$$x_{n+1} - x_n = 10^n - 81(n+1) - (10^{n-1} - 81n) = 9\cdot 10^{n-1} - 81 = 9(10^{n-1} - 9) > 0,\ \ n \ge 4$$

Ca urmare, avem că $x_{n+1} - x_n > 0$ pentru $n \ge 4$, deci:

$$x_n > x_{n-1} > \ldots > x_4\ ,\ adică\ 10^{n-1} - 81n > 1000 - 243\ ,\ de\ unde\ 10^{n-1} - 81n > 0\,.$$

Analizăm pe rând cazurile $n = 1, 2, 3$.

Cazul $n = 1$

$\overline{a_1a_2\ldots a_n} = a_1(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) + a_n \Rightarrow a_1 = a_1 \cdot a_1 + a_1 \Rightarrow a_1 = 0$, ceea ce nu se poate.

Cazul $n = 2$

$$\overline{a_1a_2\ldots a_n} = a_1(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) + a_n \Rightarrow \overline{a_1a_2} = a_1(a_1 + a_2) + a_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overline{a_10} = a_1(a_1 + a_2) \Rightarrow 10 \cdot a_1 = a_1(a_1 + a_2) \Rightarrow a_1 + a_2 = 10$$

Soluțiile posibile sunt: $(a_1, a_2) = (1, 9); (2, 8); (3, 7); (4, 6); (5, 5); (6, 4); (7, 3); (8, 2); (9, 1)$.

Cazul $n = 3$

$$\overline{a_1a_2\ldots a_n} = a_1(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) + a_n \Rightarrow \overline{a_1a_2a_3} = a_1(a_1 + a_2 + a_3) + a_3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overline{a_1a_20} = a_1(a_1 + a_2 + a_3)$$

Numărul din membrul drept are valoarea maximă 9 x 27 = 243 (dacă toate cifrele sunt egale cu 9), deci a_1 poate avea valorile 1 sau 2. Pentru $a_1 = 1$ sau 2 numărul din membrul drept are cel mult două cifre, pe când numărul din membrul stâng are 3 cifre, deci nu este posibil.

În concluzie, singurele soluții ale problemei sunt:

$\overline{a_1a_2} = 19, 28, 37, 46, 55, 64, 73, 82, 91$

În total sunt 9 soluții.