Problema 2. Fie $k > -1$. Pentru $x, y \in (0, \infty)$, notăm cu $\alpha(x,y)$ cel mai mic dintre numerele x, $\frac{k}{x} + y$, şi $\frac{1}{y}$. Aflaţi cea mai mare valoare pe care o poate lua $\alpha(x,y)$, atunci când x şi y parcurg intervalul $(0,\infty)$.

* * *

Soluţie. Pentru $y = \frac{1}{x}$, avem $\alpha\left(x, \frac{1}{x}\right) = \min\left\{x, \frac{k+1}{x}\right\} \leqslant \sqrt{k+1}$. Egalitatea are loc dacă şi numai dacă $x = \frac{k+1}{x}$, deci dacă şi numai dacă $x = \sqrt{k+1}$ şi $y = \frac{1}{\sqrt{k+1}}$. Aşadar cea mai mare valoare a lui $\alpha(x,y)$ este mai mare sau egală cu $\sqrt{k+1}$.

I $k \geqslant 0$. Presupunem că există $x, y \in (0,\infty)$, astfel încât $\alpha(x,y) > \sqrt{k+1}$. Rezultă că $x > \sqrt{k+1}$, $\frac{1}{y} > \sqrt{k+1}$, şi $\frac{k}{x} + y > \sqrt{k+1}$. Din primele două inegalităţi obţinem $\frac{k}{x} \leqslant \frac{k\sqrt{k+1}}{k+1}$ şi $y < \frac{\sqrt{k+1}}{k+1}$, deci $\frac{k}{x} + y < \sqrt{k+1}$, contradicţie. Prin urmare, presupunerea făcută este falsă, deci valoarea maximă a lui $\alpha(x,y)$ este egală cu $\sqrt{k+1}$.

II. Pentru $k \in (-1, 0)$, demonstrăm că nu există o cea mai mare valoare a lui $\alpha(x,y)$. Presupunem că există $x_0, y_0 \in (0,\infty)$, astfel încât $\alpha(x_0, y_0)$ să fie maximă.

$$\alpha(x_0,y_0) = \min\left\{x_0, \frac{1}{y_0}, \frac{k}{x_0} + y_0\right\} \leqslant \min\left\{x_0, \frac{1}{y_0}, y_0\right\} \leqslant \min\{x_0, 1\} \leqslant 1.$$

Fie $a \in (0,1)$ şi $x > \max\left\{1 - a, \frac{-k}{a}\right\}$.

Deoarece $\frac{k}{x} > -a$ şi $\alpha(x_0,y_0) \geqslant \alpha(x,1) = \min\left\{x, 1, 1 + \frac{k}{x}\right\} > 1 - a$, cum a a fost oarecare, rezultă că $\alpha(x_0,y_0) \geqslant 1$, deci $\alpha(x_0,y_0) = 1$.

i) Dacă $x_0 = 1$, $\frac{1}{y_0} \geqslant 1$ şi $\frac{k}{x_0} + y_0 \geqslant 1$, obţinem $y_0 \leqslant 1$, deci $\frac{k}{x_0} + y_0 \leqslant 1$, contradicţie.

ii) Dacă $y_0 = 1$, $x_0 \geqslant 1$ şi $\frac{k}{x_0} + y_0 \geqslant 1$, se contrazice faptul că $\frac{k}{x_0} + y_0 < 1$

iii) Dacă $\frac{k}{x_0} + y_0 = 1$, $x_0 \geqslant 1$ şi $\frac{1}{y_0} \geqslant 1$, rezultă $y_0 \leqslant 1$, deci $\frac{k}{x_0} + y_0 < 1$, contradicţie. Prin urmare nu se poate ca $\alpha(x_0,y_0) = 1$, deci în cazul în care $k \in (-1,0)$, nu există o cea mai mare valoare a lui $\alpha(x,y)$.