Etapa 5, Problema 1

Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ şi numerele reale strict pozitive x_i, $i = \overline{1,n}$, având suma egală cu 1. Considerăm sumele $S_1 = \sum_{i=1}^{n} x_i$, $S_2 = \sum_{i<j} x_i x_j$, $S_3 = \sum_{i<j<k} x_i x_j x_k$ ş.a.m.d. Demonstraţi că

$$S_2 + S_4 + \cdots > S_3 + S_5 + \cdots .$$

*****

Soluţie.

Din ipoteză, numerele x_i sunt strict pozitive şi subunitare, prin urmare produsul

$$P = \prod_{i=1}^{n} (1 - x_i)$$

este strict pozitiv.

Desfăcând parantezele şi ţinând seama de faptul că $S_1 = 1$, obţinem că

$$P = 1 - S_1 + S_2 - S_3 + S_4 - S_5 + \cdots = S_2 - S_3 + S_4 - S_5 + \cdots > 0,$$

de unde rezultă cerinţa problemei.